АКАДЕМИЯ НАУК СССР

APR 15 1960
SURPLUS
DUPLICATE

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ V
ВЫПУСК
1

Received
APR 12 1960
Air Information Division

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Александр Яковлевич Хинчин 3

Гирсанов И. В. Сильно-феллеровские процессы. I. Общие свойства . . . 7

Girsanov I. V. Fellersche Processe. I. Allgemeine Eigenschaften 28

Добрушин Р. Л. Предельный переход под знаками информации и энтропии . 29

Dobrushin R. L. Limit Approach under the Signs of Information and Entropy 37

Матвеев Р. Ф. О сингулярных многомерных стационарных процессах . . . 38

Matveev R. F. Sur les Processus Singulars Vectorielles Stationnaires . . 44

Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. II. Марковские процессы 45

Skorohod A. V. On Differentiability of Measures Which Correspond to Markov Processes 53

Маслов К. В. О некоторых предельных теоремах теории вероятностей . . . 54

Maslov K. V. On Certain Limit Theorems in Probability Theory 83

Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Квазимоментные функции в теории случайных процессов 84

Kuznetsov P. I., Stratonovich R. L., Tihonov V. I. Quasimoment Functions in Stochastic Processes Theory 102

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прохоров Ю. В. О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова . . 103

Prohorov Yu. V. On a Uniform Limit Theorem of A. N. Kolmogorov . . . 113

Мешалкин Л. Д. О приближении неограниченно-делимыми законами полиномиальных распределений 114

Meshalkin L. D. On Approximation of a Multinomial Distribution by Infinitely Divisible Laws 124

Рогозин Б. А. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме» 125

Rogozin B. A. Remark on the Paper «A Moment Inequality with an Application to the Central Limit Theorem» by C. G. Esseen 128

Беляев Ю. К. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов 128

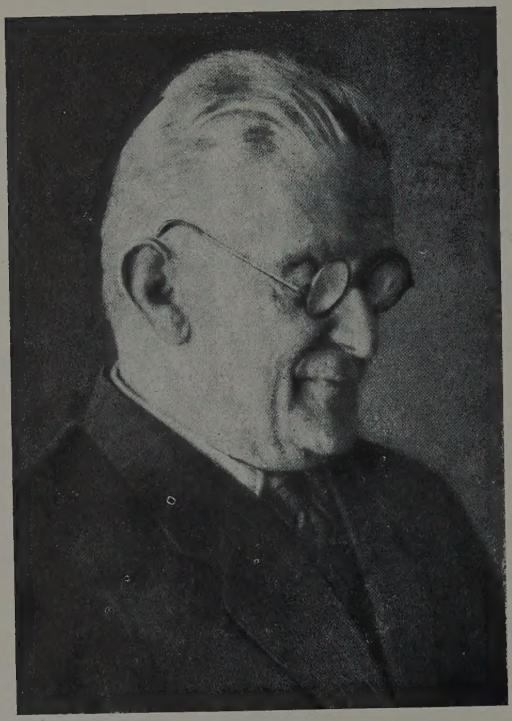
Beljaev Yu. K. Local Properties of the Sample Functions of Stationary Gaussian Processes 131

Добрушин Р. Л. Свойства выборочных функций гауссовского стационарного процесса 132

Dobrushin R. L. Properties of Sample Functions of Stationary Gaussian Processes 134

Информация о втором совещании по применению математических методов в биологии 134

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В-9-14-03



АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

АЛЕКСАНДР ЯКОВЛЕВИЧ ХИНЧИН

18 ноября 1959 г. после тяжелой и продолжительной болезни скончался выдающийся советский математик, один из виднейших представителей современной теории вероятностей Александр Яковлевич Хинчин. Исключительная широта научных, педагогических и общественных интересов привела его к роли одного из руководителей советской математики. С его именем тесно связаны создание советской школы теории вероятностей, исключительный расцвет механико-математического факультета Московского университета и жизнь Московского Математического общества.

Будучи математиком широкого диапазона, Александр Яковлевич успешно работал в нескольких областях математики — теории функций, метрической теории чисел, теории вероятностей и статистической физике. Одновременно ему не были чужды и интересы чисто прикладного характера. В первую очередь при этом нужно упомянуть исследования, которые Александр Яковлевич проводил в тесной связи со специалистами по проблемам телефонии. Всем без исключения исследованиям Александра Яковлевича присущи особенности, характерные для облика его самого,— глубина, оригинальность и ясность мысли. Каждая работа Хинчина является не только законченным научным произведением, но и литературным шедевром. Научные результаты Александра Яковлевича знаменуют собой или открытие новой неизведанной области исследований, либо приведение в логическую систему группы ранее разрозненных задач, либо создание новых путей развития тех или иных научных направлений. Достаточно назвать его знаменитые исследования по строению измеримых функций, создание основ теории стационарных случайных процессов, открытие закона повторного логарифма, теорию суммирования независимых случайных величин, чтобы сказанное приобрело осязаемую форму.

Александр Яковлевич родился 19 июля 1894 г. в селе Кондрово Медынского уезда Калужской губернии, где его отец работал инженером на бумажной фабрике. Там Александр Яковлевич провел детство, а позднее, будучи уже учеником частного реального училища Воскресенского в Москве и студентом университета, проводил каникулы. Именно в эти каникулярные месяцы он организовал в Кондрове любительский театр из среды рабочей молодежи.

В 1911 г. Александр Яковлевич стал студентом физико-математического факультета Московского университета. Там он примкнул к кружку молодых математиков, группировавшихся около Н. Н. Лузина и составивших основу Московской школы теории функций действительного

переменного. Первые научные исследования Хинчина относятся к периоду его студенческой жизни. Именно тогда им было введено понятие асимптотической производной и увязано со свойствами интеграла Данжуа. Математический талант Александра Яковлевича был замечен и университет оставил его в 1916 г. для подготовки к профессорскому званию.

С 1918 г. началась педагогическая деятельность Хинчина. Он сразу же завоевал авторитет прекрасного педагога и заслуженно считался одним из самых лучших лекторов Московского университета. Его лекции, помимо высоких научных качеств, отличались исключительной ясностью, литературной отточенностью и изяществом изложения. Немудрено, что лекции Александра Яковлевича вдохновляли молодых математиков на самостоятельные изыскания и привлекали к нему многочисленных учеников. Многие математики Советского Союза счастливы сознавать себя учениками Александра Яковлевича и проводить в жизнь его научные и педагогические принципы.

В 1922 г. в МГУ был организован научно-исследовательский институт математики и механики; с момента его организации Хинчин был приглашен туда в качестве научного сотрудника. В 1927 г. он был утвержден профессором МГУ и с тех пор его деятельность неразрывно связана с университетом: он заведывал кафедрой Теории вероятностей, затем кафедрой Математического анализа, был директором Института математики и механики (1932—1934). В 1939 г. Александр Яковлевич был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР и тогда же начал работать в математическом институте им. В. А. Стеклова. Научные заслуги его были отмечены Сталинской премией (1940 г.), орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного знамени, Орденом Знак Почета и медалями. С момента организации Академии Педагогических наук РСФСР (1944 г.) Александр Яковлевич стал ее членом и длительное время являлся членом ее Президиума.

Перу Александра Яковлевича принадлежит почти 150 работ, в том числе 12 монографий и учебников. Здесь нет возможности дать представление о всех результатах, содержащихся в этих произведениях и поэтому я ограничусь лишь кратким обзором некоторых из его работ по теории вероятностей. Такое ограничение несколько искусственно, так как идейно исследования Александра Яковлевича в теории вероятностей, теории чисел и теории функций действительного переменного тесно между собой связаны. Известно, что теоретико-вероятностной формулировке закона повторного логарифма предшествовало исследование Александра Яковлевича по метрической теории чисел, в котором он пришел к первичной формулировке этого закона. Точно также интересы в области теории функций действительного переменного привели его к глубокому пониманию значения основных ее понятий для теории вероятностей.

Первая работа Александра Яковлевича, в которой научный результат был сформулирован на языке теории вероятностей, была опубликована в 1924 г. В ней был доказан закон повторного логарифма для схемы Бернулли. Обобщение и уточнение закона повторного логарифма

вызвало к жизни большое число исследований как у нас, так и заграницей. В частности, сам Александр Яковлевич доказал эту закономерность для схемы Бернулли и для однородных процессов с независимыми приращениями.

В 1925 г. в совместной работе с А. Н. Колмогоровым были найдены необходимые и достаточные условия сходимости рядов, членами которых являются независимые случайные величины.

Большое внимание Александр Яковлевич уделил приведению в порядок и развитию теории суммирования независимых случайных величин. Одним из первых был его теперь уже классический результат относительно закона больших чисел для одинаково распределенных слагаемых: существование математического ожидания необходимо и достаточно для применимости закона больших чисел. Исключительно ценным для построения теории явилось понятие устойчивости сумм неотрицательных слагаемых, оказавшееся в тесной связи с применимостью центральной предельной теоремы. Необходимые и достаточные условия применимости этой теоремы к суммам одинаково распределенных слагаемых были найдены Александром Яковлевичем в 1935 г. одновременно с П. Леви и В. Феллером. Однако центральным его достижением в теории суммирования является построение теории предельных теорем. Им было доказано, что класс предельных распределений для сумм независимых, бесконечно малых слагаемых совпадает с классом безгранично-делимых распределений, незадолго перед тем введенных в рассмотрение А. Н. Колмогоровым и Бруно де Финетти. Доказательство этого факта, а также ряда других потребовало от Александра Яковлевича развития теории безгранично-делимых распределений. Теория суммирования трижды вдохновляла его на написание монографий — в 1927, 1933 и 1938 гг. В первой из них шла речь о теореме Ляпунова, законе больших чисел и законе повторного логарифма; во второй — о связях теории суммирования с теорией марковских случайных процессов; а в третьей об общей теории предельных распределениях для сумм и об условиях сходимости к нормальному закону. Эти монографии сыграли огромную роль в формировании интересов советских математиков к теории вероятностей и явились истоком для ряда выдающихся исследований.

В непосредственной связи с теорией суммирования находятся работы Александра Яковлевича по арифметике безгранично-делимых законов распределения. В этом новом направлении исследований работали позднее многие ученые, в том числе Д. А. Райков и Ю. В. Линник.

Важнейшим вкладом Хинчина в теорию вероятностей и одновременно в математические средства физики и техники следует считать построение им основ теории стационарных случайных процессов. Здесь ему, помимо отчетливых определений, принадлежат многие основные результаты — о законе больших чисел, формула для коэффициента автокорреляции и пр. Особого упоминания заслуживает знаменитая эргодическая теорема Хинчина, которую естественно трактовать как усиленный закон больших чисел для стационарных процессов. Основные применения этой теории, которыми занимался сам Александр Яковлевич,

относятся к использованию ее в статистической механике. Здесь ему принадлежат предельно ясные формулировки и многочисленные новые результаты. Основные свои идеи в этой области Александр Яковлевич оформил в виде монографий, изданных в 1943, 1950 и 1951 гг., переведенных позднее в ряде стран. В них было показано, что основные задачи статистической механики допускают редукцию к предельным теоремам теории вероятностей и, в частности, к локальным теоремам, для сумм независимых случайных величин. Идеи и методы, развитые Александром Яковлевичем в статистической механике нуждаются в дальнейшем развитии.

В двух статьях последних лет Александр Яковлевич дал логическую отделку понятиям и основным результатам теории информации. Мастерское изложение побудило перевести эти работы и издать их в ряде стран отдельными брошюрами.

В последние годы жизни Александр Яковлевич вновь вернулся к разработке вопросов теории массового обслуживания. Первые его интересы к этой области знания были привлечены в 1930 г., когда он был депутатом Московского совета. Тогда он получил общественное поручение работать в секции связи. Эта первоначально общественная работа привела его к серьезным научным результатам, как математического, так и практического характера. В тридцатых годах мне инженеры Московской телефонной станции рассказывали, что участие Александра Яковлевича в разработке перевода московской телефонной связи на автоматические станции принесло значительную экономию средств и привело к серьезным техническим усовершенствованиям. Тогда им были опубликованы две статьи, посвященные одна обслуживанию одним рабочим нескольких автоматических станков, а другая — теории стационарной очереди (один прибор, простейший входящий поток и произвольное распределение времени обслуживания требования). В 1955 г. вышла из печати монография, в которой Александр Яковлевич изложил свои результаты, относящиеся к изучению входящего потока требований. Им были введены в рассмотрение важные характеристики потока, которые он назвал функциями Пальма. Позднее в журнальных статьях им были даны существенные дополнения к теории, развитой в монографии. В частности, им был решен вопрос об условиях, при которых может появляться пуассоновский поток требований. Теперь, в связи с исключительным значением, которое приобрела теория массового обслуживания, результаты Александра Яковлевича найдут разнообразные применения и дальнейшее развитие.

Советская наука понесла крупнейшую утрату. Страна лишилась не только выдающегося ученого, но и гражданина в самом высоком смысле этого слова. Ученики и товарищи по работе навсегда сохранят память об Александре Яковлевиче как о человеке высокой культуры, неизменно скромном, внимательном и доброжелательно настроенном к людям.

Б. В. Гнеденко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

СИЛЬНО-ФЕЛЛЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

И. В. ГИРСАНОВ

Введение

В теории марковских процессов и в приложениях ее к дифференциальным уравнениям часто приходится рассматривать функции $f(x) = \mathbf{M}_x \xi$, где ξ — некоторая случайная величина, $\mathbf{M}_x(\cdot)$ — ее математическое ожидание при условии, что в начальный момент траектория процесса выходит из точки x фазового пространства E, на котором задан процесс. В настоящей работе выделяется некоторый класс процессов, у которых $f(x)$ непрерывна для достаточно широкого класса случайных величин ξ.

Пусть $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ — переходная вероятность однородного по времени марковского процесса. В. Феллер ввел для нее следующие условия непрерывности: функция

$$\varphi(x) = \int_E \mathbf{P}(t, x, dy) f(y)$$

должна быть непрерывна при любой ограниченной непрерывной $f(y)$. Е. Б. Дынкин предложил называть процессы этого класса феллеровскими. Мы рассмотрим более жесткие условия на $\mathbf{P}$, потребовав, чтобы $\varphi(x)$ была непрерывна при любой измеримой ограниченной функции $f(x)$. Такие процессы естественно называть сильно-феллеровскими. Различные варианты точного определения и связь между ними, а также случаи неоднородных по времени процессов будут рассмотрены ниже.

Грубо говоря, сильная феллеровость означает некоторую невырожденность процесса. Например, феллеровскими, но не сильно-феллеровскими являются обычно детерминированные процессы. Напротив, процесс броуновского движения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ является типичным представителем сильно-феллеровских процессов.

К. Ито построил широкий класс диффузионных процессов, траектории которых связаны с траекториями броуновского движения ξ_t стохастическими интегральными уравнениями:

$$x_t^i - x_s^i = \sum_{k=1}^{n} \int_s^t b_u^i(u, x_u)\, d\xi_u^k + \int_s^t m^i(u, x_u)\, du,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant s,$$

$\{x_t^1, \ldots, x_t^n\}$, $\{\xi_t^1, \ldots, \xi_t^n\}$ — координаты точек x_t и ξ_t.

Во второй части настоящей работы будет доказано, что если матрица $\| b_k^i(u, x) \|^{-1}$ ограничена, то процесс x_t будет сильно-феллеровским (в случае ее вырождения сильная феллеровость может нарушаться).

§ 1. Основные понятия и обозначения

Марковский процесс мы будем понимать так, как он определяется в работах Е. Б. Дынкина [1], [2]. Для удобства читателя мы приводим здесь необходимые определения.

Марковский процесс определяется заданием следующих элементов:

а) функции $\zeta(\omega)$ на некотором пространстве Ω, принимающей неотрицательные значения, включая $+\infty$,

б) функции $x_t(\omega)$, определенной для $\omega \in \Omega$, $t \in [0, \zeta(\omega))$, со значениями из некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{B})$.

в) σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$ в пространстве $\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$, для каждых $t \geqslant s \geqslant 0$.

г) функции $\mathbf{P}_{s,x}(A)$ на σ-алгебре $\mathcal{M}^s$ в пространстве Ω, содержащей $\mathcal{M}_t^s$ при $t \geqslant s$, для каждых $s \geqslant 0$, $x \in E$.

Эти элементы определяют марковский процесс $X = \{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$, если

1) $\mathcal{M}_u^t \subset \mathcal{M}_u^s$ при $s \leqslant t \leqslant u$ для $A \in \mathcal{M}_t^s$ $\{\omega : A, \zeta > u\} \in \mathcal{M}_u^s$;

2) $\{\omega : x_t(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{M}_t^s$, $\Gamma \in \mathcal{B}$;

3) $\mathbf{P}_{s,x}$ — вероятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{M}^s$;

4) при $0 \leqslant s \leqslant t$, $\Gamma \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{P}(s, x; t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}(x_t(\omega) \in \Gamma)$$

есть $\mathcal{B}$-измеримая функция x и $\mathbf{P}(s, x; s, E \setminus x) = 0$;

5) если $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, то на Ω_t

$$\mathbf{P}_{s,x}(x_u \in \Gamma \mid \mathcal{M}_t^s) = \mathbf{P}(t, x; u, \Gamma)$$

почти всюду по мере $\mathbf{P}_{s,x}$.

Ω называется пространством элементарных исходов, $(E, \mathcal{B})$ — фазовым пространством, ζ — моментом обрыва процесса, $\mathbf{P}(s, x; t, \Gamma)$ — переходной функцией процесса X.

Кроме σ-алгебр $\mathcal{M}_t^s$ и $\mathcal{M}^s$ полезно рассматривать σ-алгебры $\mathcal{N}_t^s$ в пространстве Ω_t и $\mathcal{N}^s$, в пространстве Ω, порожденные множествами $\{\omega : x_u \in \Gamma, u \in [s, t]\}$ и $\{\omega : x_u \in \Gamma, u \in [s, \zeta)\}$ соответственно*.

Доказывается [1], что для всякой $\mathcal{N}^t$-измеримой и $\mathbf{P}_{s,x}$-суммируемой случайной величины ξ имеет место равенство:

$$\mathbf{M}_{s,x}\xi = \mathbf{M}_{s,x}\mathbf{M}_{t,x_t}\xi, \quad t \geqslant s. \tag{1.1}$$

---

* Часто возникает необходимость пополнить σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$, $\mathcal{M}^s$ (или $\mathcal{N}_t^s$, $\mathcal{N}^s$) такими множествами B, для которых существуют A и $C \in \mathcal{M}_t^s$ (или $\mathcal{M}^s \mathcal{N}_t^s, \mathcal{N}^s$), так что $A \subset B \subset C$, $\nu_s(A) = \nu_s(C)$, где $\nu_s(\cdot) = \int_E \mu(dx) \mathbf{P}_{s,x}(\cdot)$, а μ — произвольная мера на E, $\mu(E) = 1$; пополненные таким образом σ-алгебры будут обозначаться $\overline{\mathcal{M}_t^s}$, $\overline{\mathcal{M}^s}$, $\overline{\mathcal{N}_t^s}$, $\overline{\mathcal{N}^s}$.

Марковский процесс X называется однородным по времени, если на σ-алгебре $\mathscr{M}^0$ определен при $t \geqslant 0$ оператор θ_t, сохраняющий теоретико-множественные операции и такой, что:

$$\theta_t \mathscr{M}_h^0 = \mathscr{M}_{t+h}^t,$$

$$\theta_t \Omega_0 = \Omega_t,$$

$$\theta_t \{\omega : x_h \in \Gamma\} = \{\omega : x_{t+h} \in \Gamma\}, \quad h \geqslant 0, \ \Gamma \in \mathscr{B},$$

$$P_{t,x}(\theta_t A) = P_{0,x}(A), \quad A \in \mathscr{M}^0.$$

В однородном случае можно считать $s = 0$ и писать $\mathbf{M}_x(\cdot)$, понимая под этим $\mathbf{M}_{0,x}(\cdot)$.

Для однородного процесса имеет место следующая формула: пусть ξ является $\mathscr{M}_t^0$-измеримой, а η является $\overline{\mathscr{N}}^0$-измеримой, тогда

$$\mathbf{M}_{0,x}\xi\theta_t\eta = \mathbf{M}_{0,x}\xi\mathbf{M}_{0,x_t}\eta. \tag{1.2}$$

Нам понадобится следствие формулы (1.2). Если $A \in \mathscr{M}_t^0$, $B \in \overline{\mathscr{N}}^0$, то

$$\mathbf{P}_{0,x}(A\theta_t B) = \int_A \mathbf{P}_{0,x_t}(B)\,\mathbf{P}_{0,x}(d\omega). \tag{1.3}$$

Все рассматриваемые нами процессы принадлежат к классу строго-марковских процессов; это означает, что в формулах (1.1) — (1.3) можно заменить t на случайную величину $\tau(\omega)$, независящую от будущего* (см. подробнее [1], [2]).

Фазовое пространство $(E, \mathscr{O})$** мы будем для простоты предполагать сепарабельным локально-компактным метрическим пространством: все открытые множества которого измеримы (т. е. принадлежат σ-алгебре $\mathscr{B}$).

Мы будем в дальнейшем пользоваться некоторыми понятиями функционального анализа, поэтому будет целесообразно напомнить здесь основные определения:

Пусть B — банахово пространство ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций на E с нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$, C — подпространство непрерывных функций.

В B вводятся различные топологии:

$$s\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{(сильный предел)}$$

означает сходимость по норме пространства B,

$$w\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{(слабый предел)}$$

означает, что $f_n(x) \to f(x)$, $x \in E$ и $\|f_n\|$ ограничены

$$k\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

---

* Т. е. такую, что $\{\omega : \tau \leqslant t < \zeta\} \in \mathscr{H}_t$.

** $\mathscr{O}$ — система открытых множеств, задающая топологию в E.

будет означать, что $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на каждом компакте и $\|f_n\|$ ограничены. И, наконец,

$$k_U \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

будет означать равномерную сходимость $f_n(x) \to f(x)$ на каждом компакте в области U.

Со всяким марковским процессом X на E можно связать семейство операторов в B, положив

$$T_{st}f(x) = \int_E \mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ dy)\, f(y) = \mathbf{M}_{s,x} f(x_t).$$

Легко видеть, что они непрерывны в слабой топологии и*

$$T_{st} = T_{su}T_{ut},\quad s \leqslant u \leqslant t. \tag{1.4}$$

§ 2. Определение сильной феллеровости

В предыдущем параграфе от переходной вероятности $\mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ \Gamma)$ требовалась только измеримость по x при фиксированных s, t, Γ. Во многих случаях бывает полезным требование, чтобы переходные вероятности мало менялись при переходе от x к близкой точке y.

Если $\mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ \Gamma)$ при фиксированных s и t, $t > s$ как мера в E непрерывна в слабой топологии, т. е. для любой $f \in C$

$$\lim_{y\to x} T_{st}f(y) = T_{st}f(x),$$

то процесс называется феллеровским. Это условие можно записать так

$$T_{st}C \subseteq C.$$

Определение (А). *Марковский процесс называется сильно-феллеровским, если* $\mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ \Gamma)$ *непрерывна по* x *при фиксированных* t, $s (t > s)$ *и* $\Gamma \in \mathcal{B}$.

Это определение эквивалентно следующему:

Определение (А′). *Марковский процесс называется сильно-феллеровским, если*

$$T_{st}B \subseteq C.$$

Впрочем, более естественно, быть может, рассмотреть

Определение (Б). *Марковский процесс называется сильно-феллеровским в узком смысле, если переходная вероятность* $\mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ \Gamma)$, $t > s$ *как мера в* E *есть непрерывная по вариации функция от* x, *т. е.*

$$\operatorname*{Var}_{y\to x} |\mathbf{P}(s,\ x;\ t,\ \Gamma) - \mathbf{P}(s,\ y;\ t,\ \Gamma)| \to 0. \tag{2.1}$$

В операторных терминах эквивалентное определение может быть дано в такой форме:

---

* В случае однородного процесса мы получаем полугруппу операторов T_t с заменой (1.4) на

$$T_{t+s} = T_t T_s.$$

Более подробно см. [3].

Определение (Б′). *Марковский процесс называется сильно-феллеровским в узком смысле, если он феллеровский, и при любом* $t > s$ T_{st} *отображает всякое ограниченное множество из* C *во множество, компактное в топологии* k^*.

Замечание. Можно показать, что операторы T_{st}, удовлетворяющие (Б′), отображают всякое ограниченное множество из B во множество из C с тем же свойством. Более того, абстрактное семейство слабо непрерывных операторов T_{st}, заданное на C и удовлетворяющее (1.4) и (Б′), можно единственным образом продолжить на все B в слабо-непрерывное семейство с сохранением свойства компактности отображения.

В случае компактного E определение (Б′) означает, что операторы T_{st} вполне непрерывны в C относительно сильной топологии.

§ 3. Формулировка результатов

Пусть U — область в E. Обозначим C_U множество непрерывных в U функций на E (впрочем, вне U они могут быть даже не определены, тогда мы будем доопределять их нулем), и H_s — множество $\mathcal{M}^s$-измеримых случайных величин $\eta(\omega)$. Запись $\eta(\omega) = \widetilde{k}_U \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega)$ будет означать, что

$$\mathbf{M}_{s,x}\eta(\omega) = k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}\eta_n(\omega). \tag{3.1}$$

Обозначим $H_s^0(U)$ класс случайных величин η таких, что $\eta \in H_s$, а $\mathbf{M}_{s,x}\eta \in C_U$. Положим $\eta \in H_s^1$, если существует такое $\delta > 0$ (зависящее от η), что $\eta \in H_{s+\delta}$, а $\mathbf{M}_{s+\delta,x}\eta \in B$; наконец, обозначим H_s^2 подмножество ограниченных случайных величин класса H_s^1.

Теорема 1. *Пусть* X *— сильно-феллеровский процесс,* U *— открытая область. Тогда класс* $H_s^0(U)$ *содержит* H_s^1 *и замкнут относительно* $\widetilde{k}_U$*-сходимости.*

Очевидно, что $H_s^0(U)$ является линейным многообразием; при дополнительных ограничениях имеет место

Теорема 2. *Пусть* X *— процесс теоремы* 1. *Отнесем случайную величину* η *к классу* $H_s^2(U)$, *если для нее существует такая последовательность функций* $\eta_n(\omega) \in H_s^2$, *равномерно-ограниченных по* n, *что*

$$k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}|\eta_n - \eta| = 0. \tag{3.2}$$

Тогда

(1) $H_s^2 \subseteq \overline{H}_s^2(U) \subseteq H_s^0(U)$,

(2) *если* $f(x^1, \ldots, x^n)$ *— непрерывная функция* n *вещественных переменных* $\eta^1, \ldots, \eta^n \in \overline{H}_s^2(U)$ *и* $\eta = f(\eta^1, \ldots, \eta^n)$, *то* $\eta \in \overline{H}_s^2(U)$.

Для процессов, сильно-феллеровских в узком смысле встает вопрос об описании таких множеств Z случайных величин $\eta(\omega)$, для которых множе-

* Понятие сильно-феллеровского процесса возникло при обсуждении доклада автора на семинаре Е. Б. Дынкина в Московском университете. Достаточность условия (Б) для выполнения теоремы 4 была замечена Р. Л. Добрушиным, сам термин «сильно-феллеровский процесс» и определение в форме (А) были предложены Е. Б. Дынкиным.

ство $\widetilde{Z} = \{f : f(x) = \mathbf{M}_{s,x}\eta(\omega),\ \eta \in Z\}$ является компактным в k_U-топологии.

Теорема 3. *Пусть X — процесс, сильно-феллеровский в узком смысле, U — открытая область. Пусть $Z_{\delta,N}(\delta > 0,\ N < \infty)$ — множество случайных величин $\eta(\omega)$, такое, что*

$$\eta \in H_{s+\delta},\ \|M_{s+\delta,x}\eta(\omega)\| < N.$$

Тогда множество $\widetilde{Z}_{\delta,N} = \{f : f(x) = \mathbf{M}_{s,x}\eta,\ \eta \in Z_{\delta,N}\}$ компактно в C_U относительно топологии k_U.

Следствие. *Если для множества $Z = \{\zeta(\omega)\} \subset H_s$ существует последовательность $Z^n_{\delta_n, N_n}$, удовлетворяющих условиям теоремы 3, так что*

$$k_U \lim_{n\to\infty} \sup_{\zeta\in Z} \inf_{\eta\in Z^n_{\delta_n,N_n}} |\mathbf{M}_{s,x}(\zeta - \eta)| = 0, \tag{3.3}$$

то множество $\widetilde{Z} = \{f : f(x) = \mathbf{M}_{s,x}\zeta,\ \zeta \in Z\}$ компактно в C_U относительно топологии k_U.

Следующая теорема относится к случаю однородного по времени процесса. Для таких процессов нам понадобится понятие равномерной на каждом компакте стохастической непрерывности, которая означает, что для любого компакта $K \in \mathcal{B}$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in K} \mathbf{P}_x\{\rho(x_t, \bar{x}) > 0\} = 0, \tag{3.4}$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние от x до y, и

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in K} (1 - \mathbf{P}_x(\zeta > t)) = 0. \tag{3.5}$$

В ряде случаев нам будет достаточно выполнения (3.4), (3.5) для любого компакта, принадлежащего некоторой области U; в этом случае, мы будем говорить, что условия (3.4), (3.5) выполнены в U.

Пусть V — множество, для которого величина

$$\tau_V(\omega) = \inf\{t : t > 0,\ x_t(\omega) \in V\}$$

определена, измерима и не зависит от далекого будущего. Такие множества мы будем называть допустимыми.

Точка x называется регулярной для V, если

$$\mathbf{P}_x\{\tau_V(\omega) > 0\} = 0.$$

Поведение в регулярных точках некоторых функционалов от траекторий процесса описывает

Теорема 4. *Пусть X — однородный по времени сильно-феллеровский процесс с непрерывными траекториями, V — допустимое множество, x_0 — регулярна для V. Пусть f — измеримая функция на E, $g(t)$ и $h(t)$ — измеримые функции вещественного переменного, такие, что:*

$$\mathbf{M}_x\left|g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_t)\,dt\right)\chi(A)\right| \leqslant h[\mathbf{P}_x(A)], \tag{3.6}$$

причем $\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} \mathbf{M}_x\, g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_t)\,dt\right) = 0. \tag{3.7}$$

Если в некоторой окрестности точки x_0 *выполнены* (3.4) *и* (3.5), *то для любой* $f \in B$ *непрерывной в* x_0

$$\lim_{x\to x_0} \mathbf{M}_x f[x_{\tau_V}] = f(x_0). \tag{3.8}$$

К. Дамбисом было доказано одно важное свойство сильно-феллеровских процессов.

Теорема 5. *Переходные функции сильно-феллеровского процесса обладают плотностью по некоторой мере* μ *на* E.

В § 5 исследуются свойства некоторых конкретных классов функционалов, в § 6 устанавливается совпадение слабой топологии, построенной по потенциалам ограниченных функций с исходной топологией в E.

Я пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую благодарность профессору Е. Б. Дынкину, под руководством которого была выполнена и написана настоящая работа.

§ 4. Общие свойства сильно-феллеровских процессов

Прежде чем приступить к изучению основных свойств сильно-феллеровских процессов, исследуем вопрос об эквивалентности различных определений сильной феллеровости.

Лемма 4.1. *Определения* (А) *и* (А′) *эквивалентны,* (Б) *и* (Б′) *эквивалентны, из* (Б) *следует* (А).

Доказательство. Начнем с наиболее нетривиального утверждения об эквивалентности (Б) и (Б′).

1. Из (Б) следует (Б′). Действительно, пусть $\{f_a\}$ — семейство непрерывных функций * из C, $\|f_a\| < N$; рассмотрим множество $\{\varphi_a : \varphi_a = T_{st} f_a,\ t > s\}$. В силу определения топологии k_U и счетно-компактности E достаточно доказать, что для каждого компакта $K \in \mathcal{B}$ из $\{\varphi_a\}$ можно выделить равномерно-сходящуюся на K подпоследовательность; взяв тогда систему компактов K_i, так что $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, и всякий компакт K принадлежит одному из K_i, мы сможем из последовательности, равномерно-сходящейся на K_1 выделить подпоследовательность, равномерно-сходящуюся на K_2, и т. д., а затем диагональным процессом получим последовательность, равномерно-сходящуюся на каждом компакте.

Пусть теперь K — произвольный компакт, в силу обобщенной теоремы Арцела (см. например [12]) для доказательства компактности $\{\varphi_a\}$ на K необходимо и достаточно установить равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность функций семейства $\{\varphi_a\}$ на K.

Равномерная ограниченность очевидна. Для доказательства равностепенной непрерывности обозначим $\delta(\varepsilon, x)$ верхнюю грань значений δ, таких, что

* Здесь $a \in A$, где A — некоторое бесконечное множество.

$\mathrm{Var}\,|\mathbf{P}(s,x;t,\Gamma)-\mathbf{P}(s,y;t,\Gamma)|<\varepsilon$ для всех x, y, для которых $\rho(x,y)<\delta$ (ρ — расстояние в E). Тогда

$$\inf_{x\in K}\delta(\varepsilon,x)=\delta(\varepsilon,K)>0.$$

Действительно, пусть $\delta(\varepsilon,K)=0$. Тогда существует последовательность $x_i\in K$, так что $\delta(\varepsilon,x_i)\to 0$, $x_i\to x\in K$. Но имеет место неравенство:

$$\lim_{x_i\to x}\inf\delta(\varepsilon,x_i)>\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{\varepsilon}{2},x\right)>0.$$

Заметим теперь, что для x_1, $x_2\in K$

$$|\varphi_\alpha(x_1)-\varphi_\alpha(x_2)|=\left|\int_E\mathbf{P}(s,x_1;t,dy)f_\alpha(y)-\int_E\mathbf{P}(s,x_2;t,dy)f_\alpha(y)\right|<N\varepsilon.$$

как только $\rho(x_1,x_2)<\delta(\varepsilon,K)$.

2. Из (Б′) следует (Б). Пусть это не так. Тогда существуют $\varepsilon>0$, x_0 и последовательность $x_i\to x_0$, такие, что:

$$\mathrm{Var}\,|\mathbf{P}(s,x_0;t,\Gamma)-\mathbf{P}(s,x_i;t,\Gamma)|>\varepsilon.$$

но эта вариация есть норма функционала $F^i(f)=T_{st}f(x_i)-T_{st}f(x_0)$, рассматриваемого на C, поэтому можно выбрать последовательность $f_i\in C$ так, чтобы

$$\|f_i\|\leqslant 1,$$
$$|T_{st}f_i(x_i)-T_{st}f_i(x_0)|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $\varphi_k(x)=T_{st}f_k(x)$. В силу (Б′) можно выбрать подпоследовательность φ_{k_j}, равномерно-сходящуюся в некоторой компактной окрестности U точки x_0 к непрерывной функции $\varphi(x)$. Возьмем n_1, так, что при $j>n_1$

$$|\varphi_{k_j}(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{6},\quad x\in U.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ при $j>n_2$

$$|\varphi(x_{k_j})-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{6}.$$

Отсюда следует, что при $j>\max(n_1,n_2)$

$$\frac{\varepsilon}{2}<|\varphi_{k_j}(x)-\varphi_{k_j}(x_0)|\leqslant|\varphi_{k_j}(x)-\varphi(x_{k_j})|+|\varphi(x_{k_j})-\varphi(x_0)|+$$
$$+|\varphi(x_0)-\varphi_{k_j}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает непрерывность $\mathbf{P}(s,x,t,\Gamma)$ по вариации*.

* Аналогичное доказательство для операторов в пространстве функций, определенных на отрезке, см. [13] гл. V § 2.

3. Из (A′) следует (A) тривиально. Для того чтобы вывести (A′) из (A) достаточно заметить, что любая функция из $\mathcal{B}$ есть равномерный предел линейных комбинаций характеристических функций измеримых множеств.

Переход от (Б) к (A) является очевидным. Вопрос о том, вытекает ли (Б) из (A) для процессов с непрерывными траекториями не решен. Легко построить пример семейства вероятностных мер на отрезке [0,1] так, чтобы для любой измеримой, ограниченной функции f

$$\int_0^1 \mathbf{P}(1, dy) f(y) = \lim_{x \to 1} \int_0^1 \mathbf{P}(x, dy) f(y),$$

$$\operatorname{Var} |\mathbf{P}(1, dy) - \mathbf{P}(x, dy)| > \frac{1}{2}.$$

Приступим к доказательству теоремы 1.

Пусть $\eta \in H_s^1$, применяя формулу (1.1), получаем:

$$\mathbf{M}_{s,x}\eta = \mathbf{M}_{s,x}\mathbf{M}_{s+\delta,\, x_{s+\delta}}\eta = T_{s,s+\delta}\varphi_\eta(x),$$

где $\varphi_\eta(x) = \mathbf{M}_{s+\delta,\, x}\eta$; $\varphi_\eta(x) \in B$ по определению H_s^1, а тогда, в силу (A), $T_{s,s+\delta}\varphi_\eta \in C$.

Замкнутость H_s^0 относительно $\tilde{k}_U$-сходимости очевидным образом следует из локальной компактности пространства E.

Теорема 1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 2, заметим, что включение $\overline{H}_s^2 \subset H_s^1$ следует из теоремы 1, так как (3.2) влечет за собой (3.1); включение $H_s^2 \subset \overline{H}_s^2$ очевидно. Для окончания доказательства нам понадобится

Лемма 4.2. *Пусть* $\eta^{(1)}$ *и* $\eta^{(2)}$ *принадлежат* $\overline{H}_s^2$. *Тогда*

$$\eta = \eta^{(1)}\eta^{(2)} \in \overline{H}_s^2.$$

Доказательство. По определению $\overline{H}_s^2$ для $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ существуют последовательности $\eta_n^{(1)}$ и $\eta_n^{(2)}$, для которых

$$k_U \lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_{s,x} |\eta^{(i)} - \eta_n^{(i)}| = 0; \quad i = 1,2, \ldots, \tag{4.1}$$

причем для некоторого $N < \infty$

$$|\eta_n^{(i)}| < N; \; i = 1,2, \ldots$$

В силу (4.1) из этого следует, что

$$\mathbf{P}_{s,x}\{|\eta^{(i)}| \leqslant N\} = 1 \text{ при } x \in U; \; i = 1,2.$$

Имеем:

$$k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x} |\eta^{(1)}\eta^{(2)} - \eta_n^{(1)}\eta_n^{(2)}| \leqslant \mathbf{M}_{s,x} |(\eta^{(1)} - \eta_n^{(1)})\eta^{(2)}| +$$

$$+ \mathbf{M}_{s,x} |\eta_n^{(1)}(\eta^{(2)} - \eta_n^{(2)})| \leqslant N k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x} (|\eta^{(1)} - \eta_n^{(1)}| + |\eta^{(2)} - \eta_n^{(2)}|) = 0.$$

Так как $\eta_n^{(1)}\eta_n^{(2)}$ очевидным образом принадлежат H_s^2 и $|\eta_n^{(1)}\eta_n^{(2)}| < N^2$, то $\eta = \eta^{(1)}\eta^{(2)} \in \overline{H}_s^2$ в силу определения последнего.

Закончим доказательство теоремы 2. Ясно, что, если $\eta^{(1)} \in \overline{H}_s^2$ и $\eta^{(2)} \in \overline{H}_s^2$, то $\eta = e_1\eta^{(1)} + e_2\eta^{(2)} \in \overline{H}_s^2$. Из этого и леммы 1 следует, что вместе с любым набором $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)} \in \overline{H}_s^2$ в $\overline{H}_s^2$ входит и $\eta = Q(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$, где $Q(x^1, \ldots, x^n)$ — многочлен от n вещественных переменных.

Пусть $f(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывная функция; возьмем $N < \infty$ такое, чтобы $\mathbf{P}_x(|\eta^{(i)}| \leqslant N;\ i = 1, \ldots, n) = 1$ при всех $x \in U$ (относительно существования такого N см. доказательство леммы (4.2)). Введем новые величины $\overline{\eta}^{(i)}$, положив

$$\overline{\eta}^{(i)} = \begin{cases} \eta^{(i)}, & |\eta^{(i)}| \leqslant N, \\ 0, & |\eta^{(i)}| > N. \end{cases}$$

По теореме Вейерштрасса существует последовательность $Q_m(x^1, \ldots, x^n)$ многочленов, равномерно сходящаяся к $f(x^1, \ldots, x^n)$ на кубе $|x^i| \leqslant N$. Если мы положим теперь $\eta_m = Q_m(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(m)})$, то очевидно, что

$$k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x} |\eta - \eta_m| = 0.$$

Из этого и из того, что $|\eta_m|$ ограничены равномерно по m, следует, что $\eta \in \overline{H}_s^2$.

Теорема 2 доказана полностью.

Для доказательства теоремы 3 применим, как и в теореме 1, формулу (1.1).

$$\mathbf{M}_{s,x}\eta = \mathbf{M}_{s,x}\mathbf{M}_{s+\delta,\, x_{s+\delta}}\eta = T_{s,\, s+\delta}\varphi_\eta(x),$$

где $\varphi_\eta(x) = \mathbf{M}_{s+\delta,\, x}\eta$, после чего утверждение теоремы тривиально следует из определения (Б′).

Для доказательства следствия заметим, что компактность $\widetilde{Z}$ в топологии k_U будет доказана, если мы установим компактность Z в смысле равномерной сходимости, рассматривая в качестве области определения $f \in \widetilde{Z}$ произвольный, но фиксированный компакт.

Пусть K — компакт. Выполнение (3.3) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\dot{Z}_{\delta_n, N_n}^n$, что каждый элемент $f \in Z$ удален от $\dot{Z}_{\delta_n, N_n}^n$ не более, чем на ε, если в качестве расстояния $\rho_0(f, g)$ взять $\sup_{x\in K} |f(x) - g(x)|$. Но $\widetilde{Z}_{\delta_n, N_n}^n$ в силу теоремы 3 компактно в топологии k_U, следовательно значения $f \in \widetilde{Z}_{\delta_n, N_n}^n$ на K образуют множество, компактное во введенной выше

метрике. А так как $\widetilde{Z}^n_{\delta_n, N_n}$ аппроксимируют $\widetilde{Z}$ с любой точностью, то и само $\widetilde{Z}$ компактно.

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 4.3. *Пусть X однородный по времени процесс с непрерывными траекториями на локально-компактном топологическом пространстве $(E, \mathcal{B})$, $U \in \mathcal{B}$. Пусть для каждого компакта $K \subset U$ выполнены* (3.4), (3.5). *Тогда*

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in K} \mathbf{P}_x \{\tau_u < t\} = 0 \tag{4.2}$$

для каждого компакта $K \subset U$.

Для упрощения доказательства предположим процесс строго-марковским, хотя лемма верна и без этого ограничения.

Выберем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы замыкания ε- и 2ε-окрестностей K (мы будем обозначать их K_ε и $K_{2\varepsilon}$ соответственно) лежали бы в U. Заметим, что в силу локальной компактности пространства E они будут компактами; обозначим $\tau_{2\varepsilon}$ момент первого выхода из $K_{2\varepsilon}$, и $\tau = \min(t, \tau_{2\varepsilon})$.

Пусть $h > t > 0$; положим

$$A_t = \{\omega : \tau_{2\varepsilon} < t, \zeta > t\},$$

$$B_h = \{\omega : x_h \in K_\varepsilon, \zeta > h\},$$

$$B = \{\omega : x_{h-\tau} \in K_\varepsilon, \zeta > h - \tau\},$$

$$\varphi^\varepsilon_K(h) = \sup_{y \in K_{2\varepsilon},\, t < h} \mathbf{P}_y \{\rho(x_t, y) \geqslant \varepsilon\}.$$

Из (3.4) следует, что $\varphi^\varepsilon_K(h) \to 0$ при $h \to 0$. В силу строгой марковости из (1.3) следует

$$\mathbf{P}_x\{A_t \cap B_h\} = \mathbf{P}_x\{A_t \cap \theta_\tau B\} = \int_{A_t} \mathbf{P}_x(d\omega)\, \mathbf{P}_{x_\tau}(B) =$$

$$= \int_{A_t} \mathbf{P}_x(d\omega)\, \mathbf{P}_{x_{\tau_{2\varepsilon}}}(x_{h-\tau} \in K_\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}_x(A_t)\, \varphi^\varepsilon_k(h).$$

С другой стороны $\mathbf{P}_x(B_h) \geqslant \mathbf{P}_x(\Omega_h) - \varphi^\varepsilon_k(h)$ для $x \in K$. В силу очевидного соотношения:

$$\Omega_h \setminus (\Omega_h \setminus B_h) = B_h \subset (\Omega_t \setminus A_t) \cup A_t \cap B_h$$

имеем для $x \in K$

$$\mathbf{P}_x(\Omega_h) - \varphi^\varepsilon_K(h) \leqslant \mathbf{P}_x(\Omega_t) - \mathbf{P}_x(A_t) + \mathbf{P}_x(A_t)\, \varphi^\varepsilon_K(h),$$

откуда

$$\mathbf{P}_x(A_t) \leqslant \frac{\varphi^\varepsilon_K(h)}{1 - \varphi^\varepsilon_K(h)} + \frac{\mathbf{P}_x(\Omega_t) - \mathbf{P}_x(\Omega_h)}{1 - \varphi^\varepsilon_K(h)}.$$

При $t \to 0$ и $h = 2t$ получаем, из (3.4) и (3.5), что $\mathbf{P}_x(A_t) \to 0$ равномерно по $x \in K$. Но $\tau_U > \tau_{2\varepsilon}$, следовательно и подавно $\mathbf{P}_x(\tau_u < t < \zeta) \to 0$ равномерно на K. А так как

$$\mathbf{P}_x\{\tau_u < t\} \leqslant \mathbf{P}_x\{\tau_u < t < \zeta\} + \mathbf{P}_x\{\zeta \leqslant t\},$$

то из (3.5) следует (4.2). Это доказательство, близкое к доказательству аналогичного утверждения в работе [4] было сообщено автору Л. Серегиным.

Приступим к доказательству теоремы 4.

Пусть $t > s \geqslant 0$.

Обозначим $Q_V(x, s, t)$ вероятность того, что найдется $U \in (s, t)$ такое, что $x_U \in V$, и положим

$$Q_V(x, t) = \lim_{s \to 0} Q_V(x, s, t).$$

Этот предел существует в силу монотонного возрастания $Q_V(x, s, t)$ по s при фиксированных t и x. Очевидно, что

$$Q_V(x, t) = \mathbf{P}_x(\tau_V < t).$$

Поэтому во всякой регулярной относительно V точке x

$$Q_V(x, t) = 1.$$

Лемма 4.4. *Пусть X — однородный по времени строгомарковский процесс с непрерывными траекториями, V — допустимая область, x_0 регулярна для V, $Q_V(x, t)$ непрерывна в x_0. Тогда из* (3.6) *следует* (3.7). *Если же процесс равномерно-стохастически непрерывен в некоторой окрестности U_0 точки x_0, то имеет место и* (3.8).

Доказательство. Выберем окрестность U_1 точки x_0, так, чтобы

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ при } x \in U_1. \tag{4.3}$$

Положим $U_2 = U_1 \cap U_0$ и выберем такую окрестность U_3 точки x_0, замыкание которой было бы компактным и содержалось бы в U_2.

В силу (4.2) мы можем найти такое $t < t_0$, что при всех $x \in U_3$

$$\mathbf{P}_x\{\tau_{U_3} < t\} < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Выберем, наконец, окрестность U_4 точки x_0, так, чтобы $U_4 \subset U_3$ и при всех $x \in U_4$

$$Q_V(x, t) > 1 - \varepsilon. \tag{4.5}$$

Теперь оценим разность $\mathbf{M}_x f(x_{\tau_V}) - f(x_0)$. Заметим, что из (4.4) и (4.5) следует, что для всех $x \in U_4$

$$\mathbf{P}_x\{x_{\tau_V} \in U_2\} > 1 - 2\varepsilon. \tag{4.6}$$

Имеем

$$\mathbf{M}_x f(x_{\tau_V}) - f(x_0) = \int_{(\tau_V < \zeta)} f(x_{\tau_V})\, \mathbf{P}_x(d\omega) - f(x_0) =$$

$$= \int_{x_{\tau_V} \in U_2} [f(x_{\tau_V}) - f(x_0)]\, \mathbf{P}_x(d\omega) + [\mathbf{P}_x(\tau_V < \zeta) - \mathbf{P}_x(x_{\tau_V} \in U_2)]\, f(x_0) +$$

$$+ \int_{x_{\tau_V} \overline{\in} U_2} f(x_{\tau_V})\, \mathbf{P}_x(d\omega).$$

Так как $U_4 \subset U_3 \subset U_1$, то из (4.6) и (4.3) следует, что

$$|\mathbf{M}_x f(x_{\tau_V}) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon(1-2\varepsilon) + |f(x_0)|\,2\varepsilon + \|f\|\,2\varepsilon$$

при всех $x \in U_4$, что доказывает второе утверждение леммы 4.4.

Что касается первого утверждения леммы, то в силу непрерывности $Q_V(x,t)$ в x_0 и регулярности точки x_0, можно для любых $\delta > 0$ и $t > 0$ выбрать ее окрестность $U_{\delta,t}$ так, чтобы

$$\mathbf{P}_x\{\tau_V < t\} > 1-\delta, \quad x \in U_{\delta,t}.$$

Имеем:

$$\left|\mathbf{M}_x g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_s)\,ds\right)\right| \leqslant \left|\mathbf{M}_x g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_s)\,ds\right)\chi(\tau_V < t)\right| +$$

$$+\left|\mathbf{M}_x g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_s)\,ds\right)\chi(\tau_V \geqslant t)\right| \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|g(s)\| + h[\mathbf{P}_x(\tau_V \geqslant t)] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|g(s)\| + \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta} h(s), \quad x \in U_{\delta,t}.$$

Выбирая сначала t так, чтобы $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\|g(s)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а затем δ так, чтобы $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\delta} h(s) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, получаем окончательно, что при $x \in U_{\delta,t}$

$$\left|\mathbf{M}_x g\left(\int_0^{\tau_V} f(x_s)\,ds\right)\right| < \varepsilon,$$

что доказывает и первую половину леммы.

Чтобы получить из леммы 4.4 теорему 4 достаточно показать, что из сильной феллеровости вытекает непрерывность $Q_V(x,t)$ во всех регулярных относительно V точках x.

Заметим, что при $s > 0$

$$Q_V(x,s,t) = T_{\frac{s}{2}} Q_V\left(x, \frac{s}{2}, t-\frac{s}{2}\right),$$

следовательно $Q_V(x,s,t)$ при $s > 0$ непрерывна по x. А так как $Q_V(x,t)$ есть предел монотонно-возрастающей последовательности непрерывных функций, не превосходящих 1, то она непрерывна всюду, где равна 1, т. е. во всяком случае во всех регулярных относительно V точках. Теорема 4 доказана. Соответствующее доказательство для винеровского процесса см. [9].

Для феллеровских процессов легко построить пример, когда из регулярности точки не следует выполнения (3.7) и (3.8).

Замечание. Из непрерывности в x_0 всякой $h(x) = \mathbf{M}_x f[x_{\tau_V}]$, где $f \in B$ непрерывна в x_0, еще не следует регулярность x_0 в смысле приведенного выше определения, и можно построить пример, когда такая регулярность действительно не имеет места. Это обстоятельство связано в какой-то мере, с тем, что непрерывность $h(x)$ в граничных точках есть аналитическое свойство функций $\pi(x,\Gamma) = \mathbf{P}_x(\tau_U \in \Gamma)$, а в определении регулярности участвует еще и время, не имеющее к этому уравнению прямого отношения.

Изложим принадлежащее К. Дамбису доказательство теоремы 5.

Пусть $\{t_n\}$ — множество всех положительных рациональных чисел, $\{x_m\}$ — счетное всюду плотное в E множество. Положим

$$\mu(\Gamma) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \mathbf{P}(0, x_m; t_n, \Gamma).$$

Если $\mu(\Gamma) = 0$, то очевидно, $\mathbf{P}(0, x_m; t_n, \Gamma) = 0$ при всех m и n, и значит $\mathbf{P}(0, x; t_n, \Gamma) = 0$ при всех x и n в силу непрерывности $\mathbf{P}(0, x; t_n, \Gamma)$ по x. А так как $\mathbf{P}(s, x; t, \Gamma) = \mathbf{P}(0, x; t-s, \Gamma)$ для любого $t > s \geqslant 0$ и при $0 < t_n < t - s$

$$\mathbf{P}(0, x; t-s, \Gamma) = \int_E \mathbf{P}(0, x; t-s-t_n, dy)\, \mathbf{P}(0, x_{t-s-t_n}; t_n, \Gamma),$$

то из доказанного следует, что $\mathbf{P}(s, x, t, \Gamma) = 0$, если только $\mu(\Gamma) = 0$. По теореме Радона—Никодима в этом случае

$$\mathbf{P}(s, x, t, \Gamma) = \int_\Gamma \pi(s, x; t, y)\, \mu(dy).$$

Укажем без доказательства еще на одно свойство сильно-феллеровских процессов. Если фазовые пространства E_1 и E_2 двух процессов X_1 и X_2 пересекаются по области $E_3 = E_1 \cap E_2$ такой, что части исходных процессов на множестве E_3 имеют одинаковые переходные вероятности, то при некоторых дополнительных ограничениях существует единственный процесс X на $E = E_1 \cup E_2$ такой, что его подпроцессы, получаемые с помощью остановки в момент выхода из E_1 и E_2 имеют те же переходные вероятности, что X_1 и X_2, соответственно. При этом для X сохраняется сильная феллеровость, если ею обладали X_1 и X_2; как показывают элементарные примеры с детерминированным движением, для феллеровских процессов это не так.

§ 5. Примеры

5.1. Пусть X — однородный по времени сильно-феллеровский процесс, U — область, для которой выполнены (3.4), (3.5), $f \in B$. Тогда $f(x_{\tau_U}) \in H_s^0(U)$. Действительно, если положить $\tau_n = \inf\{t : t > \frac{1}{n},\ x_t \in E \setminus U\}$, то

$$f(x_{\tau_n}) \in H_s^0(U); \tag{5.1}$$

при этом

$$|{}_x f(x_{\tau_n}) - \mathbf{M}_x f(x_{\tau_n})| \leqslant 2\|f\|\mathbf{P}_x\left\{\tau_U < \frac{1}{n}\right\}. \tag{5.2}$$

В силу леммы 4.3 отсюда следует, что

$$f(x_{\tau_U}) = \tilde{k}_U \lim_{n\to\infty} f(x_{\tau_n})$$

и, по теореме 1, $f(x_{\tau_U}) \in H_s^*(U)$.

Функции $\varphi(x) = \mathbf{M}_x f(x_{\tau_U})$ обладают рядом интересных свойств. Если $V \subset U$, то имеет место тождество:

$$\varphi(x) = \mathbf{M}_x \varphi(x_{\tau_V}), \tag{5.3}$$

которое представляет собой очевидный аналог «теоремы о среднем» для обычных гармонических функций. Если X — процесс броуновского движения в n-мерном евклидовом пространстве, то класс функций φ совпадает с классом гармонических в области U функций, в случае произвольного процесса X такие функции будут называться X-гармоническими.

Если X является сильно-феллеровским в узком смысле процессом, всякое ограниченное семейство $\widetilde{Z}$ X-гармонических функций компактно в топологии k_U.

Как уже упоминалось выше (см. доказательство леммы 4.1. и теоремы 4) достаточно построить для каждого компакта $K \subset U$ последовательность $\varphi_i \in \widetilde{Z}$, равномерно-сходящуюся на K.

Пусть K компакт из U, K_ε — его ε-окрестность, содержащаяся в U вместе с замыканием; она тоже компактна в силу локальной компактности E; пусть V такова, что $K_\varepsilon \subset \overline{V} \subset U$. Возьмем в качестве $Z^n_{\frac{1}{n}, N}$ множество $\varphi(x_{\tau_n}), \varphi \in \widetilde{Z}$. Так как φ ограничены на $\overline{V}$, то оценка (5.2) с заменой U на V показывает, что множества $Z^n_{\frac{1}{n}, N}$ и множество $Z = \{\eta = \varphi(x_{\tau_V})\}$ удовлетворяют условиям следствия из теоремы 3, поэтому из $\widetilde{Z}$ можно выбрать последовательность $\varphi_i(x)$, равномерно-сходящуюся на K_ε к некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$. Сделав в (5.3) предельный переход, видим, что φ_0 тоже удовлетворяет «теореме о среднем» и является X-гармонической.

Из теоремы 4 следует тот очевидный вывод, что ограниченная X-гармоническая функция с непрерывной граничной функцией $f(x)$ непрерывна во всех регулярных точках U.

Повторяя почти дословно доказательство Дамбиса теоремы 5, мы легко получим, что функция $\varphi(x) = \mathbf{M}_x f(x_{\tau_U})$ имеет вид:

$$\varphi(x) = \int_{\overline{U}} f(y)\, \pi_x(y)\, \mu_U(dy)$$

(подробнее см. 5.6).

5.2. Пусть X — марковский процесс, α^t_s есть $\mathcal{M}^s_t$-измеримая функция, удовлетворяющая по s и t соотношениям:

$$\alpha^t_s = \alpha^u_s \alpha^t_u, \quad s \leqslant u \leqslant t, \quad 0 \leqslant \alpha^t_s \leqslant 1. \tag{5.4}$$

Мы будем называть такие функции, следуя Е. Б. Дынкину [1], мультипликативными функционалами от процесса X.

Семейство операторов

$$\widetilde{T}_{st} f(x) = \mathbf{M}_{s,x} \alpha^t_s f(x_t) \tag{5.5}$$

определяет новый марковский процесс X_α, который называется в [1] подпроцессом X. Если X — сильно феллеровский процесс, то естественно вы-

делить те его подпроцессы, которые тоже будут сильно-феллеровскими.

Пусть X — сильно-феллеровский (сильно-феллеровский в узком смысле) процесс, α_s^t — мультипликативный функционал, так что

$$k \lim_{\delta \to 0} \mathbf{M}_{s,x} | 1 - \alpha_s^{s+\delta} | = 0. \tag{5.6}$$

Тогда подпроцесс X_α процесса X, определенный с помощью (5.5) также сильно-феллеровский (сильно-феллеровский в узком смысле).

Действительно, при $\delta < t - s$

$$\widetilde{T}^s_t f(x) = \mathbf{M}_{s,x} \alpha_s^{s+\delta} \alpha_{s+\delta}^t f(x_t) = \mathbf{M}_{s,x} \alpha_{s+\delta}^t f(x_t) - \mathbf{M}_{s,x}(1 - \alpha_s^{s+\delta}) \alpha_{s+\delta}^t f(x_t) =$$
$$= \widetilde{T}_{s,s+\delta} \mathbf{M}_{s+\delta, x_{s+\delta}} \alpha_{s+\delta}^t f(x_t) - \mathbf{M}_{s,x}(1 - \alpha_s^{s+\delta}) \alpha_{s+\delta}^t f(x_t).$$

В силу сильной феллеровости первое слагаемое есть непрерывная функция x, что касается второго, то из (5.4) и (5.6) следует:

$$k \lim_{\delta \to 0} | \mathbf{M}_{s,x}(1 - \alpha_s^{s+\delta}) \alpha_{s+\delta}^t f(x_t) | \leqslant k \lim_{\delta \to 0} \| f \| \mathbf{M}_{s,x}(1 - \alpha_s^{s+\delta}) = 0.$$

Поэтому

$$\widetilde{T}_{s,t} f = k \lim_{\delta \to 0} T_{s,s+\delta} \widetilde{T}_{s+\delta,t} f,$$

откуда очевидным образом следуют наши утверждения. Условие (5.6) выполнено, если

$$\alpha_s^t = \exp\left[-\int_s^t h(u, x_u)\, du \right], \tag{5.7}$$

где $h(u, x)$ — ограниченная положительная функция.

5.3. Важным классом подпроцессов являются подпроцессы, траектории которых обрываются в момент выхода на некоторое множество U. Соответствующий им функционал α_s^t задается формулой

$$\alpha_s^t = \begin{cases} 0, & \tau_U \leqslant t, \\ t, & \tau_U > t. \end{cases}$$

Мы будем считать U областью, а процесс X — однородным по времени сильно-феллеровским процессом с непрерывными траекториями, равномерно-стохастически непрерывным в U. Обозначим $T_t^0 f(x) = \mathbf{M}_x \alpha_0^t f(x_t)$. Имеем:

$$T_t^0 f(x) = \mathbf{M}_x \alpha_s^t f(x_t) - \mathbf{M}_x (1 - \alpha_0^s) \alpha_s^t f(x_t) = T_s T_{t-s}^0 f(x) - \mathbf{M}_x (1 - \alpha_0^s) \alpha_s^t f(x_t).$$

Заметим, что в силу леммы 4.3

$$k \lim_{U} \lim_{s \to 0} | \mathbf{M}_x (1 - \alpha^0) \alpha_s f(x_t) | \leqslant k \lim_{U} \lim_{s \to 0} \| f \| \mathbf{P}_x (\tau_U < s) = 0,$$

откуда следует равенство

$$T_t^0 f = k_U T_s T_{t-s}^0 f$$

и непрерывность $T_t^0 f$ в U.

Можно также рассмотреть процесс, который получается из X с помощью остановки его траекторий в момент выхода из U. Соответствующая ему полугруппа T_t^1 задается формулой

$$T_t^1 f(x) = T_t^0 f(x) + \mathbf{M}_x (1 - \alpha_0^t) f(x_{\tau_U}).$$

Непрерывность $T_t^1 f$ в U устанавливается тем же методом, что и в предыдущем случае с использованием леммы 4.3.

С помощью методов, использованных при доказательстве теоремы 4, можно без труда доказать, что $T_t^0 f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, если x_0 — регулярная относительно $E \setminus U$ — точка; если же f непрерывна в x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} T_t^1 f(x) = f(x_0).$$

5.4. Пусть X — однородный по времени сильно-феллеровский процесс. Потенциал Rf функции f мы определим равенством

$$Rf(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\infty f(x_t)\, dt = \int_0^\infty T_t f(x)\, dt$$

фактически интеграл берется в пределах $(0,\zeta)$). Если f такова, что

$$k \lim_{\delta \to 0} \mathbf{M}_x \int_0^\delta f(x_t)\, dt = 0, \tag{5.8}$$

$$\mathbf{M}_x \int_0^\infty f(x_t)\, dt \in B,$$

то

$$\int_0^\infty f(x_t)\, dt = \tilde{k}_U \lim_\delta \int_\delta^\infty f(x_t)\, dt,$$

откуда в силу теоремы 1 следует непрерывность Rf. Условия (5.8), вообще говоря, выполняются не для всякого $f \in B$ (например для броуновского движения на плоскости при $f = 1$ они не выполнены). Во всяком случае они выполнены для подпроцессов X_α, у которых

$$\alpha_s^t \leqslant \exp[-c_s(t-s)],\ c_s > 0. \tag{5.9}$$

В частности, при $\alpha_s^t = \exp[-\lambda(t-s)]$ оператор R записывается в виде

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt$$

и называется резольвентой производящего оператора A полугруппы, соответствующей процессу X. Доказывается, что область D_A определения опе-

ратора A содержится во множестве $g = R_\lambda f, f \in B$ (см. [2], [3]). Из наших результатов следует непрерывность функций из D_A.

В случае подпроцессов X_α сильно-феллеровского в узком смысле процесса X при тех же ограничениях на h, что и выше в (5.7), можно доказать с помощью теоремы 3 компактность множества потенциалов функций f принадлежащих ограниченному множеству в B.

Что касается потенциалов подпроцесса X, обрывающегося в момент выхода из некоторой области U, то для их непрерывности тоже нужны некоторые дополнительные ограничения. Достаточным ограничением будет требование, чтобы

$$\mathbf{M}_x \tau_U \in B. \tag{5.10}$$

При этом условии имеем, определив τ_n по формуле (5.1),

$$R \quad x = \mathbf{M}_x \int_0^{\tau_U} f(x_t)\, dt = k_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_x \int_{\frac{1}{n}}^{\tau_n} f(x_t)\, dt,$$

и, в силу (5.10),

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\tau_n} f(x_t)\, dt \in H^1_{\frac{1}{n}},$$

откуда следует выполнение условий теоремы 1. Поведение этих потенциалов в граничных точках U описывается теоремой 4. Для выполнения условия (5.10) достаточно, чтобы процесс X сам был подпроцессом сильно-феллеровского процесса с теми же ограничениями на α_s^t, что и выше в (5.9). При этом автоматически будет выполнено и условие (5.10). Эти утверждения следуют из того, что $\tau_U < \zeta$, а в этом случае ζ удается мажорировать независимой от процесса показательно-распределенной величиной.

5.5. В приложениях встречаются функционалы еще нескольких типов — например $\exp\left[\int_0^t f(x_s)\, ds\right]$, где f — произвольная ограниченная функция $\left(\int_0^{\tau_U} f(x_s)\, ds\right)^n$ и другие (см. [5], [14]). Для установления непрерывности их математических ожиданий, можно или пользоваться теоремой 2, или проводить доказательство непосредственно.

Рассмотрим в качестве примера функционал $\exp\eta$, где $\eta = \int_0^{\tau_U} f(x_t)\, dt$; $u(x) = \mathbf{M}_x \exp\eta$ при $f(x) > 0$ может не существовать. Рассмотрим подробнее этот случай. Если

$$\sup_{x\in U} \mathbf{M}_x \eta = a < 1, \tag{5.11}$$

то $u(x)$ конечна при всех $x \in U$ и ограничена. Действительно, рассмотрим

вместо X подпроцесс $\widetilde{X}$, положив $\widetilde{\zeta} = \min\{\zeta, \tau_U\}$. Имеем

$$\mathbf{M}_x\eta^n = n\mathbf{M}_x\int_0^{\eta}(\eta - t)^{n-1}dt = n\mathbf{M}_x\int_0^{\infty}\chi(\eta > t)(\eta - t)^{n-1}\,dt =$$

$$= n\int_0^{\infty}\mathbf{M}_x[\chi(\eta > t)\,\theta_\tau\eta^{n-1}]\,dt, \quad \text{где} \quad t = \int_0^{\tau} f(x_s)\,ds,$$

применяя (1.2), получаем

$$\mathbf{M}_x\eta^n = n\int_0^{\infty}\mathbf{M}_x\chi(\eta > t)\,\mathbf{M}_{x_\tau}\eta^{n-1}\,dt,$$

откуда

$$\mathbf{M}_x\eta^n \leqslant n\mathbf{M}_x\eta \sup_{x\in U}\mathbf{M}_x\eta^{n-1}.$$

Используя (5.11), получаем окончательно:

$$\mathbf{M}_x\eta^n \leqslant n!\ a^n,$$

откуда очевидно следует, что

$$u(x) \leqslant \sum_0^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Пусть теперь $u(x)$ ограничена в U, $f \in B$. Обозначим $u_n(x) =$

$$= \mathbf{M}_x \exp\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\tau_U - \frac{1}{n}} f(x_t)\,dt\right)\chi\left(\tau_U > \frac{1}{n}\right).$$

Так как $\tau_n = \theta_{\frac{1}{n}}\tau_U$ при $\tau_U > \frac{1}{n}$, то $|u_n(x)| \leqslant |u(x)|$.

Так как $u_n(x) = T^0_{\frac{1}{n}}u(x)$, то $u_n(x)$ непрерывна в U для равномерно-стохастически непрерывного в U сильно-феллеровского процесса (см. 5.3).

Кроме того

$$|u(x) - u_n(x)| = \left|\mathbf{M}_x\exp\left(\int_0^{\tau_U} f(x_t)\,dt\right) - \chi\left(\tau_n > \frac{1}{n}\right)\exp\left(\int_0^{\tau_U - \frac{1}{n}} f(x_t)\,dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}_x\left|\chi\left(\tau_U > \frac{1}{n}\right)\exp\left(\int_0^{\tau_U} f(x_t)\,dt\right)\left[1 - \exp\left(-\int_0^{\frac{1}{n}} f(x_t)\,dt - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_{\tau_U - \frac{1}{n}}^{\tau_U} f(x_t)\,dt\right)\right]\right| + \mathbf{M}_x\chi\left(\tau_U \leqslant \frac{1}{n}\right)\exp\left(\int_0^{\tau_U} f(x_t)\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\exp\left(2\,\frac{\|f\|}{n}\right) - 1\right)u(x) + \exp\frac{\|f\|}{n}\,\mathbf{P}_x\left(\tau_U \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что $u(x)$ непрерывна в U, так как

$$u(x) = k_U \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

Легко можно проверить, что $u(x) - 1$ удовлетворяет условию (3.6), обеспечивающему ее непрерывность в регулярных точках границы.

Действительно

$$u(x) - 1 = \mathbf{M}_x \int_0^{\tau_U} u(x_t) f(x_t)\, dt.$$

Имеем:

$$\left| \mathbf{M}_x \left(\int_0^{\tau_U} u(x_t) f(x_t)\, dt \right) \chi(A) \right| \leqslant \sup_{x \in U} \mathbf{M}_x \int_0^{\tau_U} f(x_t)\, dt \chi(A) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-a} \sqrt{\mathbf{M}_x \chi(A)} \sqrt{\mathbf{M}_x \left(\int_0^{\tau_U} f(x_t)\, dt \right)^2} \leqslant \frac{a}{1-a} \sqrt{2\mathbf{P}_x(A)}.$$

Условие (3.6) очевидно выполняется при

$$g(t) = t, \quad h(t) = \frac{a}{1-a} \sqrt{2t}.$$

5.6. Из теоремы Дамбиса следует представимость потенциалов, рассмотренных в 5.4, в следующем виде

$$Rf(x) = \int_0^\infty \int_E \pi(0, x; t, y) f(y)\, \mu(dy)\, dt = \int_0^\infty f(x)\, g(x, y)\, \mu(dy),$$

где $g(x, y) = \int_0^\infty \pi(0, x; t, y)\, dt$ почти всюду по мере μ, если только

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(0, x; t, E)\, dt < \infty.$$

Функция $g(x, y)$ является естественным аналогом функции Грина в дифференциальных уравнениях. Аналогичное представление имеет место и для X-гармонической функции равномерно-стохастически-непрерывного сильно-феллеровского процесса, т. е., если $\varphi(x) = \mathbf{M}_x f(x_{\tau_U})$, то

$$\varphi(x) = \int_{\overline{U}} f(y)\, \pi(x, y)\, \nu_U(dy).$$

Действительно, если x_n — всюду плотное в U множество, то, полагая

$$\nu_U(\Gamma) = \sum_1^\infty \frac{\mathbf{P}_{x_n}(x_{\tau_U} \in \Gamma)}{2^n},$$

мы теми же рассуждениями можем доказать абсолютную непрерывность всех $\mathbf{P}_x(x_{\tau_U} \in \Gamma)$ по мере $\nu_U(\Gamma)$. Функция $\pi(x, y)$ является аналогом ядра Пуассона.

§ 6. Одно топологическое свойство сильно-феллеровского процесса

Из общей теории сильно-феллеровских процессов и разобранных в 5.1 — 5.6 примеров видно, что поведение сильно-феллеровского процесса тесно связано с топологией пространства E. В случае процесса детерминированного дви-

жения на плоскости легко могут быть построены примеры нарушения непрерывности функционалов всех рассмотренных выше типов. Встает задача введения в пространство E «естественной» топологии, связанной с процессом X. Существуют различные способы ее построения — «fine topologie». Картана для броуновского движения ([11] см. также [7]), объявление непрерывными всех функций $\mathbf{P}_x(t, \Gamma)$; Хантом в [10] было введено понятие почти открытого множества, позволяющее определить некоторую топологию, аналогичную «fine topologie», которая по существу эквивалентна объявлению непрерывными всех функций $f(x)$, для которых $\tau_{it} = f(x_t)$ является непрерывным справа процессом. Однако эти топологии обладают чрезвычайно уродливыми свойствами. В «fine topologie», например, нет ни одной сходящейся последовательности.

Ниже приводится один из возможных способов введения топологии в E. приводящий в случае равномерно-стохастически-непрерывного сильно-феллеровского процесса с непрерывными траекториями к исходной топологии пространства E. А именно, объявим базисными открытыми множествами все множества вида

$$A_{\widetilde{R}, f, \alpha} = \{x : \widetilde{R}f > \alpha\}.$$

Здесь $f \in B$, $\widetilde{R}f$ — потенциал произвольного подпроцесса, удовлетворяющего (5.6) и (5.9). В силу первого условия сохраняется равномерная стохастическая непрерывность, второе обеспечивает существование потенциалов.

Из 5.2 и 5.4 следует, что для сильно-феллеровского процесса $A_{\widetilde{R}, f, \alpha}$ принадлежит $\mathcal{O}$. Докажем, что для процессов с непрерывными траекториями, для которых выполнено (4.2), во всяком $U \in \mathcal{O}$ содержится некоторое $A_{\widetilde{R}, f, \alpha}$.

Пусть $U_0 \in \mathcal{O}$, U_ε и $U_{2\varepsilon}$ — его ε- и 2ε-окрестности, причем $\overline{U}_0$ компактно $\overline{U}_{2\varepsilon} \subset U$. Возьмем некоторое $\lambda > 0$, $v \in B$ такую, что

$$v(x) = 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon,\ v(x) = -1 \text{ при } x \in E \setminus U_\varepsilon.$$

Построим подпроцесс X_β с $\alpha_0^t = \exp\left\{\beta \int_0^t v(x_s)\, ds - \lambda t\right\}$ и рассмотрим потенциал $\varphi_\beta = R^1$. В силу (4.2) при некоторых $0 < \varepsilon < 1$ и $t > 0$ имеем $\varphi_\beta(x) > \lambda^{-1}(1-\varepsilon)[1 - \exp(-\lambda t)] = \delta$ при $x \in U_0$ и любом β. Для всякой точки $x \in \overline{U}_{2\varepsilon} \setminus U_{2\varepsilon}$ существует $\beta(x)$ такое, что $\varphi_{\beta(x)}(x) < \frac{\delta}{4}$; в силу непрерывности $\varphi_\beta(y)$ по y имеем $\varphi_{\beta(x)}(y) < \delta/4$ и при y из некоторой окрестности U_x точки x. Так как $\overline{U}_{2\varepsilon} \setminus U_{2\varepsilon}$ компактно, то мы можем выбрать конечное число окрестностей U_{x_i}, покрывающих $\overline{U}_{2\varepsilon} \setminus U_{2\varepsilon}$; тогда при $\beta_0 = \max_i \beta(x_i)$ имеем $\varphi_{\beta_0}(x) < \delta/4$ во всех точках границы $U_{2\varepsilon}$. Но

$$\varphi_\beta(x) \leqslant \frac{1}{\beta + \lambda} + \sup_{y \in \overline{U}_{2\varepsilon} \setminus U_{2\varepsilon}} \varphi_\beta(y)$$

при $x \in E \setminus U_{2\varepsilon}$, поэтому для $\beta > \beta_0 + 4/\delta$ имеем $\{x : \varphi_\beta(x) > \delta\} \subset U$. Из сказанного выше следует эквивалентность введенной нами топологии с исходной.

Одной из интересных задач в общей теории сильно-феллеровских процессов является изучение возможных вырождений процесса, что соответствует эллиптическому дифференциальному оператору 2-го порядка с вырождающейся на некотором множестве главной частью.

Поступила в редакцию
15. 4. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, Гостехиздат, 1959.
[2] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 38—60.
[3] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 25—37.
[4] Е. Б. Дынкин, Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, 6 (1952), 563.
[5] Е. Б. Дынкин, Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН СССР, **104**, 5 (1955), 691.
[6] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Строго-марковские процессы, Теория вероят. и ее примен. **I**, 1 (1956), 38—60.
[7] J. L. Doob, Semimartingales and subharmonic functions, Transactions of the Amer. Math. Soc., **77**, 1 (1954), 86—121.
[8] J. L. Doob, A probability approach to the heat equation, Transactions of the Amer. Math. Soc., **80**, 1 (1955), 216—280.
[9] G. A. Hunt, Some theorems concerning Brownian motion, Transactions of the Amer. Math. Soc., **81**, 2 (1956), 294—319.
[10] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials I. Illinois Journal of Mathem., **I**, 1 (1957), 44.
[11] H. Cartan and J. Deny, Le principle du maximum en theorie du potentials et la notion de fonction subharmonique, Acta Sci. Matem. Szeged, **12** (1950), 81—100.
[12] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Издательство МГУ, 1954.
[13] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИИЛ, 1954.
[14] Р. З. Хасьминский, Распределение вероятностей для функционалов от траекторий случайного процесса диффузионного типа, ДАН СССР, **104**, 1 (1955), 22—25.

FELLERSCHE PROCESSE. I. ALLGEMAINE EIGENSCHAFTEN

I. V. GIRSANOV (MOSKAU)

(*Zusammenfassung*)

In dem Artikel wird eine Klasse Markov'scher Prozesse auf dem metrischen Raum E erforscht. Einen Prozess X nennt man stark-feller'sch, bzw. stark-feller'sch im engeren Sinne wenn für jede beschränkte meßbare Function f und $t>s$

$$T_{st} f(x) = \mathbf{M}_{s,x} f(x_t) = \int \mathbf{P}(s, x; t, dy) f(y)$$

in x stetig ist, bzw wenn $\operatorname{Var} |\mathbf{P}(s, x; t, \Gamma) - \mathbf{P}(s, y; t, \Gamma)| \to 0$ bei $y \to x$ gilt.

Es wird die Stetigkeit für eine breite Klasse von Function der Art $\varphi(x) = \mathbf{M}_{s,x} \xi(\omega)$ bewiesen. Für homogene, im engeren Sinne stark-feller'sche Prozesse mit stetigen Trajektorien wird die Stetigkeit der Funktionen

$$\varphi(x) = \mathbf{M}_x f(x_{\tau_\Gamma}), \quad \psi(x) = \mathbf{M}_x g\left(\int_0^{\tau_\Gamma} V(x_t) dt\right)$$

in den Grenzpunkten Γ untersucht.

Die Ergebnisse werden zur Untersuchung verschiedener Functionale des Prozesses X und zur Untersuchung der Unterprozesse von X angewannt.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКАМИ ИНФОРМАЦИИ И ЭНТРОПИИ

Р. Л. ДОБРУШИН

Пусть заданы измеримые пространства (X, S_X), (Y, S_Y), вероятностная мера $P_{\xi\eta}(A)$, $A \in S_X \times S_Y$ (совместное распределение случайных величин ξ и η) и пусть одномерные распределения задаются формулами

$$P_\xi(B) = P_{\xi\eta}(B \times Y), \quad B \in S_X, \quad P_\eta(C) = P_{\xi\eta}(X \times C), \; C \in S_Y. \tag{1}$$

Как и обычно, информацией будем называть *

$$I(\xi, \eta) = \sup \sum_{i,j} P_{\xi\eta}(A_i \times B_j) \log \frac{P_{\xi\eta}(A_i \times B_j)}{P_\xi(A_i) P_\eta(B_j)}, \tag{2}$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям $\{A_i\}$ пространства X и $\{B_j\}$ пространства Y на попарно непересекающиеся измеримые слагаемые. Колмогоров показал [1], что если задана последовательность пар величин $(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})$ ($P^{(n)}_{\xi\eta}$ — их совместные распределения), если $\mathfrak{B}$ — подалгебра σ-алгебры $S_X \times S_Y$ такая, что для любого $A \in S_X \times S_Y$ найдется $D \in \mathfrak{B}$, для которого **

$$P_{\xi\eta}(A \Delta D) = 0,$$

и если при всех $D \in \mathfrak{B}$

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{\xi\eta}(D) = P_{\xi\eta}(D), \tag{3}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) \geqslant I(\xi, \eta). \tag{4}$$

Результат Колмогорова включает также результат Гельфанда и Яглома ([1], [2]), состоящий в том, что неравенство (4) имеет место, если $R^{(n)}_{\xi\eta}$ слабо сходится к $P_{\xi,\eta}$. Гельфанд и Яглом привели также простые примеры, показывающие, что естественное предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I(\xi, \eta) \tag{5}$$

вообще говоря неверно. Цель данной работы — указать условия, при которых

* Мы считаем $a \log \frac{a}{0} = \infty$ при $a > 0$, $0 \log \frac{0}{0} = 0$.

** Δ — симметрическая разность.

соотношение (5) оказывается выполненным, а также изучить некоторые связанные с этим вопросы.

Вместо информации мы будем изучать обобщенную энтропию. Понятие обобщенной энтропии, изученное Калбеком и Лейблером [3] и Перецом [4], включает в себя как частный случай понятие информации. Пусть задано измеримое пространство (Z, S_Z) и две вероятностных меры $p(A)$, $q(A)$, $A \in S_Z$. Мы будем называть энтропией меры p по мере q число

$$H(p, q) = \sup_{\{A_i\}} \sum_i p(A_i) \log \frac{p(A_i)}{q(A_i)}, \tag{6}$$

где $\{A_i\}$ представляют собой всевозможные конечные разбиения пространства на попарно непересекающиеся слагаемые. Если взять в качестве (Z, S_Z) пространство $(X \times Y, S_X \times S_Y)$, энтропия меры $P_{\xi\eta}$ по мере $P_\xi \times P_\eta$ окажется равной информации (2). Полное доказательство этого факта было впервые проведено в работе [4]. Пусть теперь $p(.) = p_1(.) + p_2(.)$, где p_1 абсолютно непрерывна относительно q, а p_2 сингулярна относительно q. Выбрав некоторое множество $B \in S_Z$ такое, что $p_2(B) = P_2(z)$, $p_1(B) = 0$, положим

$$a_{pq}(z) = \begin{cases} \frac{dp_1(z)}{dq(z)}, & z \in Z \setminus B, \\ +\infty, & z \in B. \end{cases} \tag{7}$$

Легко видеть, что функция $a_{pq}(z)$ определена однозначно с точностью до множества меры 0 относительно меры p. Назовем

$$h_{pq}(z) = \log a_{pq}(z) \tag{8}$$

энтропийной плотностью меры p по мере q. Тогда

$$H(p, q) = \int_Z h_{pq}(x)\, p(dz), \tag{9}$$

где интеграл всегда имеет смысл, так как интеграл от отрицательной части функции $h_{pq}(z)$ всегда сходится. Доказательство равенства (9) для случая $H(p, q) < \infty$ дано Перезом [4]. Если $p = P_{\xi\eta}$ и $q = P_\xi \times P_\eta$, то мы будем называть $h_{pq}(z)$ *информационной плотностью* пары величин ξ и η и обозначать $i_{\xi\eta}(x, y)$. Равенство (9) переходит в равенство

$$I(\xi, \eta) = \int_{X+Y} i_{\xi\eta}(x, y)\, P_{\xi\eta}(dx, dy). \tag{10}$$

Оно было доказано в работах Гельфанда и Яглома [2] и Цзян Цзэ-пея [5]. Доказательство равенства (9) для общего случая мы приводить не будем, так как оно вполне аналогично доказательствам, проведенным в упомянутых работах.

Мы можем теперь сформулировать основную теорему.

Теорема 1. *Если на пространстве (Z, S_Z) заданы последовательность*

вероятностных мер $p^{(n)}(.)$ *и* $q^{(n)}(.)$ *и меры* $p(.), q(.)$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(.) = p(.), \quad \lim_{n\to\infty} q^{(n)}(.) = q(.) \tag{11}$$

в смысле сходимости по вариации, и если $h^{(n)}(z)$, $h(z)$, *соответственно, энтропийные плотности* $p^{(n)}$ *по* $q^{(n)}$ *и* p *по* q, *то*

$$\lim_{n\to\infty} h^{(n)}(z) = h(z) \tag{12}$$

в смысле сходимости по мере $p(.)$*.

Доказательство теоремы. Положим для краткости $a_{p^{(n)}q^{(n)}}(z) = a^{(n)}(z)$, $a_{pq}(z) = a(z)$. Утверждение (12) будет немедленно вытекать из предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)}(z) = a(z), \tag{13}$$

выполняемого в смысле сходимости по мере $p(.)$, и равенства (8). Поэтому мы сосредоточим усилия на доказательстве равенства (13).

Покажем, что для любого $N < \infty$ предел

$$\lim_{n\to\infty} p(\{a^{(n)}(z) < N\} \cap \{a(z) = +\infty\}) = 0. \tag{14}$$

В самом деле, обозначив $B^{(n)}$ множество точек z, стоящее в (14) под знаком вероятности, мы из того, что $B^{(n)} \subset \{a^{(n)}(z) < N\}$ выводим, что

$$p^{(n)}(B^{(n)}) \leqslant Nq^{(n)}(B^{(n)}). \tag{15}$$

С другой стороны, так как $B_n \subset \{a(z) = +\infty\}$, то из определения (7) следует, что

$$q(B^{(n)}) = 0. \tag{16}$$

Наконец, из сходимости мер по вариации следует, что

$$\lim_{n\to\infty} q^{(n)}(B^{(n)}) = q(B^{(n)}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} [p^{(n)}(B^{(n)}) - p(B^{(n)})] = 0. \tag{17}$$

Из (17) и (15) вытекает сразу равенство (14).

Покажем теперь, что для любого $N < \infty$ и любого $b > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p(\{|a^{(n)}(z) - a(z)| > b\} \cap \{a(z) < N\}) = 0. \tag{18}$$

Введем множества

$$C^{(n)} = \{a^{(n)}(z) - a(z) > b\} \cap \{a(z) < N\},$$

$$D^{(n)} = \{a^{(n)}(z) - a(z) < -b\} \cap \{a(z) < N\}.$$

* Так как наши функции могут принимать значение $+\infty$, то надо уточнить понятие сходимости по мере. Мы считаем, что $h_n(z) \to h(z)$ по мере, если $\operatorname{arctg} h_n(z) \to \operatorname{arctg} h(z)$ в обычном смысле.

Равенство (18) является следствием равенств

$$\lim_{n\to\infty} p(C^{(n)}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} p(D^{(n)}) = 0, \tag{19}$$

из которых мы докажем только первое, так как второе доказывается аналогично. Заметим, что в силу определения (7)

$$p^{(n)}(B^{(n)}) - p(B^{(n)}) \geqslant \int_{B^{(n)}} a^{(n)}(z)\, q^n(dz) - \int_{B^{(n)}} a(z)\, q(dz) =$$

$$= \int_{B^{(n)}} (a^{(n)}(z) - a(z))\, q^{(n)}(dz) + \left[\int_{B^{(n)}} a(z)\, q^{(n)}(dz) - \int_{B^{(n)}} a(z)\, q(dz)\right]. \tag{20}$$

В силу того, что $q^{(n)}(.) \to q(.)$ по вариации и того, что $0 \leqslant a(r) \leqslant N$ при $z \in B^{(n)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{B^{(n)}} a(z)\, q^{(n)}(dz) - \int_{B^{(n)}} a(z)\, q(dz)\right] = 0. \tag{21}$$

Далее, в силу определения множества B_n

$$\int_{B^{(n)}} [a^{(n)}(z) - a(z)]\, q^{(n)}(dz) \geqslant bq^{(n)}(B^{(n)}). \tag{22}$$

В силу сходимости по вариации

$$\lim_{n\to\infty} [p^{(n)}(B^{(n)}) - p(B^{(n)})] = 0, \quad \lim_{n\to\infty} [q^{(n)}(B^{(n)}) - q(B^{(n)})] = 0 \tag{23}$$

Переходя к пределу в (20) и учитывая (21), (22), (23), находим, что

$$\lim_{n\to\infty} q^{(n)}(B^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} q(B^{(n)}) = 0, \tag{24}$$

но так как $B^{(n)} \subset \{h(z) < N\}$, то

$$p(B^{(n)}) \leqslant Nq(B^{(n)}), \tag{25}$$

и поэтому из (22) следует искомое равенство (19). Таким образом равенство (18) доказано. Из равенства (14) и (18) вытекает немедленно утверждение теоремы.

Применяя теорему 1 к случаю информации, мы получим следующую теорему.

Теорема 1′. *Если на пространстве* $(X + Y,\ S_X \times S_Y)$ *задана последовательность совместных распределений вероятностей* $P_{\xi\eta}^{(n)}$ *и распределение вероятностей* $P_{\xi\eta}^{(n)}$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} P_{\xi\eta}^{(n)}(.) = P_{\xi\eta}(.) \tag{26}$$

в смысле сходимости по вариации, то для информационных плотностей справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} i_{\xi\eta}^{(n)}(x, y) = i_{\xi\eta}(x, y) \tag{27}$$

в смысле сходимости по мере $P_{\xi\eta}(.)$.

Доказательство. Теорема 1′ окажется следствием теоремы 1, если олько вывести из (26), что

$$\lim_{n\to\infty} P_{\xi}^{(n)} \times P_{\eta}^{(n)}(.) = P_{\xi} \times P_{\eta}(.) \tag{28}$$

смысле сходимости по вариации. (Здесь $P_{\xi}^{(n)}(.)$, $P_{\eta}^{(n)}(.)$ — одномерные рас-ределения, вычисляемые по совместным распределениям $P_{\xi\eta}^{(n)}$). Но из (26) емедленно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{\xi}^{(n)}(.) = P_{\xi}(.), \quad \lim_{n\to\infty} P_{\eta}^{(n)}(.) = P_{\eta}(.) \tag{29}$$

смысле сходимости по вариации. Далее для любого $B \in S_X \times S_Y$ с сечением x, задаваемым точкой $x \in X$, по теореме Фубини,

$$P_{\xi}^{(n)} \times P_{\eta}^{(n)}(B) = \int_Y P_{\eta}^{(n)}(B_x)\, P_{\xi}^{(n)}(dx), \quad P_{\xi} \times P_{\eta}(B) = \int_Y P_{\eta}(B_x)\, P_{\xi}(dx). \tag{30}$$

з (29) и (30) следует (28).

Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\varliminf_{n\to\infty} H(p^{(n)}, q^{(n)}) \geqslant H(p, q), \tag{31}$$

ричем равенство

$$\lim_{n\to\infty} H(p^{(n)}, q^{(n)}) = H(p, q) \tag{32}$$

меет место тогда и только тогда, когда или $H(p, q) = +\infty$, *или же ри некотором* n_0 *равномерно по всем* $n \geqslant n_0$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{h^{(n)}(z)\leqslant N\}} h^{(n)}(z)\, p^{(n)}(dz) = H(p^{(n)}, q^{(n)}). \tag{33}$$

Чтобы вывести это следствие, заметим, что из (11) и (9) вытекает, что сли $H(p, q) < +\infty$, то для выполнения равенства (33) необходимо и остаточно, чтобы равномерно по всем $n \geqslant n_0$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{|h^{(n)}(z)|>N\}} h^{(n)}(z)\, p^{(n)}(dz) = 0. \tag{34}$$

Чтобы свести (34) к искомому равенству (33) заметим, что из того факта, го функция $x \log x$ является при малых x убывающей функцией, следует, го для достаточно больших N

$$\int\limits_{h^{(n)}(z)<N\}} h^{(n)}(z)\, p^{(n)}(dz) = \int\limits_{\{a^{(n)}(z)\leqslant 2^{-N}\}} a^{(n)}(z) \log a^{(n)}(z)\, q^{n}(dz) \geqslant N 2^{-N}. \tag{35}$$

Отсюда следует, что равномерно по n

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{h^{(n)}(z)<-N\}} h^{(n)}(z)\, p^{(n)}(dz) = 0, \tag{36}$$

из (36) немедленно следует эквивалентность равенств (33) и (34).

Имеет место также

Следствие 1′. *Если выполнены условия теоремы* 1′, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I(\xi, \eta), \tag{37}$$

причем равенство

$$\lim_{n\to\infty} I(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I(\xi, \eta) \tag{38}$$

имеет место тогда и только тогда, когда или $I(\xi, \eta) = +\infty$ *или же при некотором* n_0 *равномерно по всем* $n \geqslant n_0$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\left\{i_{\xi\eta}^{(n)}(x,\,y) > N\right\}} i_{\xi\eta}^{(n)}(x, y)\, P_{\xi\eta}^{(n)}(dx, dy) = 0. \tag{39}$$

Это утверждение решает вопрос об условиях возможности предельного перехода под знаком информации.

Следствие 1 показывает, что невыполнение равенства (32) связано с эффектами, происходящими на множестве малой вероятности. В связи с этим мы рассмотрим еще одно понятие, предложенное А. Н. Колмогоровым. Пусть задано множество $A \in S_Z$. Энтропией меры p по мере q на множестве A назовем число

$$H_A(p, q) = \sup_{\{A_i\}} \sum_i p(A_i) \log \frac{p(A_i)}{q(A_i)}, \tag{40}$$

где $\{A_i\}$ представляют собой всевозможные конечные разбиения множества Z на попарно непересекающиеся слагаемые. Совершенно аналогично равенству (9) доказывается равенство

$$H_A(p, q) = \int\limits_A h_{pq}(z)\, p(dz). \tag{41}$$

Назовем теперь энтропией меры p по мере q с точностью до $\varepsilon > 0$ число

$$H^{\varepsilon}(p, q) = \inf_{\{A: p(A) \geqslant 1-\varepsilon\}} H_A(p, q). \tag{42}$$

Легко видеть, что $H^{\varepsilon}(p, q)$ является монотонно невозрастающей функцией от ε. Число

$$I^{\varepsilon}(\xi, \eta) = H^{\varepsilon}(P_{\xi\eta}, P_{\xi} \times P_{\eta}) \tag{43}$$

назовем информацией пары величин ξ, η с точностью до $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\lim_{n\to\infty} H^{\varepsilon}(p^{(n)}, q^{(n)}) = H^{\varepsilon}(p, q) \tag{44}$$

для любого ε, $1 > \varepsilon > 0$, *являющегося точкой непрерывности* $H^{\varepsilon}(p, q)$ *как функции от* ε.

Прежде чем дать доказательство этой теоремы, приведем простой пример, показывающий, что равенство (44) может быть неверно в точках раз-

рыва функции $H^{\varepsilon}(p, q)$. Предположим, что пространство Z состоит из двух элементов E и F, а S_Z из всех подмножеств множества Z. Положим

$$q^{(n)}(E) = q^{(n)}(F) = q(E) = q(F) = \frac{1}{2},$$
$$p(E) = \frac{1}{4};\ p(F) = \frac{3}{4},\ p^{(n)}(E) = \frac{3}{4} - \frac{1}{n},\ p^{(n)}(F) = \frac{3}{4} + \frac{1}{n}.$$

Легко видеть, что здесь

$$H^{\varepsilon}(p, q) = \begin{cases} \frac{3}{4}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{2} \text{ при } 0 \leqslant \varepsilon < \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{4}\log\frac{1}{2} \text{ при } \frac{3}{4} \leqslant \varepsilon \leqslant 1, \end{cases} \tag{45}$$

$$H^{\varepsilon}(p^{(n)}, q^{(n)}) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{n}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right) \\ \text{при} \qquad 0 \leqslant \varepsilon < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}, \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right) \text{ при } \frac{3}{4} + \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon < 1. \end{cases}$$

В этом примере имеет место сходимость по вариации, но равенство (44) неверно при $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Если пространство (Z, S_Z) с мерой $p(.)$ не содержит атомов (т. е. если для любого $\delta < p(A)$ и любого $A \in S_Z$ существует множество $B \subset A$ с $p(B) = \delta$) и если $h(p, q) < +\infty$ с вероятностью 1, то $H^{\varepsilon}(p, q)$ будет непрерывной функцией от ε, и тогда сходимость в (44) будет иметь место при всех ε.

Доказательство теоремы 2. Для любой вогнутой функции $f(z)$ верно неравенство

$$\frac{1}{q(A)}\int_A f(a(z))\, q(dz) \geqslant f\left(\frac{\int_A a(z)\, q(dz)}{q(A)}\right). \tag{46}$$

Применяя это неравенство для $f(a) = a\log a$, находим, что для любого множества $B \in S_Z$

$$H_B(p, q) \geqslant p(B)\log\frac{p(B)}{q(B)} \geqslant p(B)\log p(B). \tag{47}$$

Применяя (41) и (47), выводим, что если $A \supset B$, то

$$H_B(p, q) \leqslant H_A(p, q) - p(A \setminus B)\log(A \setminus B). \tag{48}$$

Фиксируем теперь некоторое $\bar{\varepsilon}$, являющееся точкой непрерывности функции $H^{\varepsilon}(p, q)$. Зададим малое $\delta > 0$. При некотором $\tilde{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}$

$$H^{\tilde{\varepsilon}}(p, q) \leqslant H^{\bar{\varepsilon}}(p, q) + \delta. \tag{49}$$

В соответствии с (42), найдется такое A, что

$$p(A) \geqslant 1 - \tilde{\varepsilon},\ H_A(p, q) \leqslant H^{\tilde{\varepsilon}}(p, q) + \delta. \tag{50}$$

Положим

$$A_n^{(\delta)} = A \cap \{|h^{(n)}(z) - h(z)| < \delta\}. \tag{51}$$

Применяя (48) и используя (41), выводим, что

$$H_{A_n^\delta}(p^{(n)}, q^{(n)}) \leqslant H_{A_n^\delta}(p, q) + \delta \leqslant H_A(p, q) + \delta - p(A \setminus A_n^\delta) \log p(A \setminus A_n^\delta). \tag{52}$$

В силу теоремы 1 вероятность $p(A \setminus A_n^\delta) \to 0$ при $n \to \infty$ и поэтому (52), (51), (50) и (49) показывают, что при достаточно большом n

$$H_{A_n^\delta}(p^{(n)}, q^{(n)}) \leqslant \overline{H}^\varepsilon(p, q) + 4\delta. \tag{53}$$

Далее в силу теоремы 1 и (51) при достаточно большом n

$$p^{(n)}(A_n^\delta) \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{54}$$

и таким образом при достаточно больших n

$$\overline{H}^\varepsilon(p^{(n)}, q^{(n)}) \leqslant \overline{H}^\varepsilon(p, q) + 4\delta. \tag{55}$$

Совершенно аналогичным построением доказывается, что при достаточно большом n

$$\overline{H}^\varepsilon(p^{(n)}, q^{(n)}) \geqslant \overline{H}^\varepsilon(p, q) + 4\delta. \tag{56}$$

Так как δ произвольно мало, то из (55) и (56) вытекает утверждение теоремы 2.

Аналогично тому, как, исходя из теоремы 1, мы получили теорему 2, можно, исходя из теоремы 1, получить следующую теорему.

Теорема 2′. *Если выполнены условия теоремы* 1′, *то*

$$\lim_{n \to \infty} I^\varepsilon(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I^\varepsilon(\xi, \eta) \tag{57}$$

во всех точках ε *непрерывности* $I^\varepsilon(\xi, \eta)$ *как функции от* ε.

Приведем в заключение простой пример, показывающий, что если заменить в теоремах 1 и 1′ условие сходимости по вариации условием слабой сходимости, то эти теоремы уже не будут верны. Рассмотрим в качестве (X, S_X) и (Y, S_Y) два экземпляра отрезков [0, 1] с σ-алгеброй борелевских множеств. Меру $P_{\xi\eta}^{(n)}$ мы зададим при помощи плотности $b^{(n)}(x, y)$ относительно меры Лебега

$$P_{\xi\eta}^{(n)} = \int_\Lambda b^{(n)}(x, y)\, \lambda(dx, dy), \tag{58}$$

где

$$b^{(n)}(x, y) = \begin{cases} 2, \text{ если } \dfrac{k}{2^n} \leqslant x < \dfrac{k+1}{2^n}, \ \dfrac{l}{2^n} \leqslant y < \dfrac{l+1}{2^n}, \ k + l \text{ — четное}, \\ 0, \text{ если } \dfrac{k}{2^n} \leqslant x < \dfrac{k+1}{2^n}, \ \dfrac{l}{2^n} \leqslant y < \dfrac{l+1}{2^n}, \ k + l \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{59}$$

Легко видеть, что $P_{\xi\eta}^{(n)}$ слабо сходится к мере Лебега. Одномерные меры $P_{\xi}^{(n)}$, $P_{\eta}^{(n)}$ просто совпадают с мерами Лебега. Поэтому здесь $i_{\xi\eta}^{(n)}(x, y) = b^{(n)}(x, y)$, и сходимость к информационной плотности предельного распределения, тождественно равной 1, места не имеет.

Поступила в редакцию
13.5.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом, К общему определению количества информации, ДАН СССР, **111**, 4 (1956), 745—748.
[2] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции, Успехи матем. наук, **12**, 1 (1957), 5—51.
[3] S. Kullback, R. Leiber, On information and sufficiency, Ann. of Math. Stat., **22** (1951), 79—87.
[4] A. Perez, Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Satistical Decision Function and Random Processes, 1956 (1957), 183—208.
[5] Цзян Цзэ-пей, Замечание об определении количества информации. Теор. вероят. и ее примен., **III**, 1 (1958), 99—103.

LIMIT APPROACH UNDER THE SIGNS OF INFORMATION AND ENTROPY

R. L. DOBRUSHIN *(MOSCOW)*

(*Summary*)

The main result of this paper amounts to the following statement: If a sequence of pairs of random variables (ξ_n, η_n) is given and this sequence converges in variation to a pair of random variables (ξ, η), then $\lim_{n\to\infty} I(\xi_n, \eta_n) = I(\xi, \eta)$ ($I(\xi, \eta)$ is the information of the pair ξ, η) if, and only if the sequence of corresponding information densities is uniformly integrable. A similar result is proved for entropies and for a new concept in information within a probability E of events. Conditions are found for the convergence of these quantities.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

О СИНГУЛЯРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ

Р. Ф. МАТВЕЕВ

Напомним вкратце некоторые принятые обозначения и определения понятий, с которыми мы будем иметь дело (подробнее см. [1]). Многомерным стационарным процессом $\boldsymbol{x}(t)$ назовем совокупность $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — стационарных и стационарно-связанных одномерных процессов. Отметим, что хотя такое «координатное» определение процесса для наших целей удобнее, оно не является удачным во всех отношениях (ср. определение, данное в [1]). Это проявляется, в частности, в том, что в дальнейшем, когда мы будем говорить о компонентах $\boldsymbol{x}(t)$, мы будем всегда иметь в виду возможность предварительного применения к этим компонентам любого невырожденного линейного преобразования.

Если $y(t)$ некоторый стационарный процесс, то будем записывать:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_y(d\lambda).$$

Обозначим также

$$H_i^x = \bigvee_{t=-\infty}^{\infty} \{x_i(t)\}; \qquad H_i^x(t) = \bigvee_{\tau \leqslant t} \{x_i(\tau)\},$$

$$H^x = \bigvee_{i=1}^{n} \{H_i^x\}; \qquad H^x(t) = \bigvee_{i=1}^{n} \{H_i^x(t)\}$$

(знак $\bigvee$ означает линейную оболочку элементов, множеств указанных непосредственно вслед за ним), и

$$S^x = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} H^x(t).$$

Процесс $\boldsymbol{x}(t)$ называется регулярным, если S^x равно нулю, и сингулярным, если $S^x = H^x$. Как известно (см., например, [1] теорема 4) существует такое множество Δ_0 меры нуль, что все функции

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \chi_{\overline{\Delta_0}}(\mu)\, dF_{kj}(\mu), \quad (k, j = 1,2, \ldots, n)$$

(где $\chi_s(\mu) = 1$ при $\mu \in S$ и $\chi_s(\mu) = 0$ при $\mu \overline{\in} S$) — абсолютно непрерывны; здесь $F_{kj}(\lambda)$ как обычно обозначает взаимную спектральную функцию процессов $x_k(t)$ и $x_j(t)$.

Если обозначить

$$x_k^{\Delta_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\chi_{\Delta_0}(\lambda)\, Z_{x_k}(d\lambda) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$x_{\Delta_0}(t) = (x_1^{\Delta_0}(t), \ldots, x_n^{\Delta_0}(t))$$

и аналогично определить $x_{\overline{\Delta_0}}(t)$, то

$$H^x = H^{x_{\Delta_0}} \oplus H^{x_{\overline{\Delta_0}}}.$$

Верна также следующая формула:

$$H^x(t) = H^{x_{\Delta_0}} \oplus H^{x_{\overline{\Delta_0}}}(t). \tag{1}$$

Эта формула вытекает из соотношений

$$H_k^x(t) = H_k^{x_{\Delta_0}} \oplus H_k^{x_{\overline{\Delta_0}}}(t); \quad k = 1,2, \ldots, n, \tag{2}$$

для доказательства которых надо рассмотреть произвольный одномерный стационарный процесс $y(t)$ и любое множество σ меры нуль, обладающее тем свойством, что функция

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \chi_{\overline{\sigma}}(\mu)\, dF_y(\mu)$$

абсолютно непрерывна. В самом деле, обозначим

$$y_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\chi_\sigma(\lambda)\, Z_y(d\lambda).$$

Этот процесс сингулярен, и нетрудно доказать, что

$$S^y = H^{y_\sigma}.$$

Применив эту последнюю формулу к $y(t) = x_k(t)$ и $\sigma = \Delta_0$, мы получаем (2), а следовательно, и (1).

Из (1) следует, что для теории экстраполяции стационарных процессов достаточно рассматривать только такие процессы, матрицы спектральных функций $\|F_{ij}(\lambda)\|$ которых состоят из абсолютно непрерывных функций. Поэтому мы и ограничимся этим случаем.

Обозначим $f_{ij}(\lambda)$ производную от $F_{ij}(\lambda)$ и составим матрицу $\|f_{ij}(\lambda)\|$ спектральных плотностей. Главный минор k-го порядка этой матрицы, расположенный в левом верхнем углу, обозначим $d_k(\lambda)$ (мы имеем в виду некоторую фиксированную нумерацию компонент процесса).

Теорема 1. *Если для процесса* $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *выполнено условие*

$$d_n(\lambda) > 0 \tag{3}$$

почти всюду, и $x(t)$ сингулярен, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}}{1+\lambda^2}\, d\lambda = -\infty . \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим первые две компоненты $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Разобьем $x_2(t)$ на сумму двух процессов, один из которых есть проекция $x_2(t)$ в H_1^x, а другой — $x_2^*(t)$ — ортогонален H_1^x. Спектральная плотность этого второго процесса $f_{22}^*(\lambda)$, как легко проверить, равна $\frac{d_2(\lambda)}{f_n(\lambda)}$. Ясно также, что

$$H_1^x \vee H_2^x(t) = H_1^x \oplus H_2^*(t), \text{ где } H_2^*(t) = \bigvee_{\tau \leqslant t} \{x_2^*(\tau)\}.$$

Далее рассматриваем процесс $(x_1(t), x_2^*(t), x_3(t))$ и представляем $x_3(t)$ в виде суммы двух процессов, один из которых есть проекция $x_3(t)$ на $H_1^x \vee H_2^x$, а другой — $x_3^*(t)$ — ортогонален ему. Получаем процесс $(x_1(t), x_2^*(t), x_3^*(t))$ все компоненты которого попарно ортогональны. Продолжаем такую процедуру и дальше. В результате получаем процесс $(x_1(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ с попарно ортогональными компонентами. Условие (3) гарантирует, что наш процесс ортогонализации нигде не оборвется. Если обозначим $f_{jj}^*(\lambda)$ спектральную плотность $x_j^*(t)$, то методом математической индукции можно строго доказать, что:

$$f_{jj}^*(\lambda) = \frac{d_j(\lambda)}{d_{j-1}(\lambda)}. \tag{5}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$H_1^x \vee \ldots \vee H_{n-1}^x \vee H_n^x(t) = H_1^x \oplus \ldots \oplus H_{n-1}^* \oplus H_n^*(t) \tag{6}$$

(пространства H_k^*; $k = 3, \ldots, n$ определяются аналогично H_2^*). Так как $\boldsymbol{x}(t)$ сингулярен, то левая часть (6) равна H^x. Следовательно имеем $H_n^*(t) = H_{n-1}^*$, поэтому процесс $x_n^*(t)$ сингулярен и, в силу (5), получаем (4). Теорема доказана.

Рассмотрим следствие из этой теоремы: допустим, что $d_n(\lambda) = 0$ почти всюду, и пусть существует нумерация компонент, для которой $d_1(\lambda) > 0$ почти всюду. В последовательности

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$$

ищем первый детерминант, который тождественно равен нулю. Компоненту с этим номером вычеркиваем из $\boldsymbol{x}(t)$. Повторяем далее ту же процедуру в применении к получившемуся $(n-1)$-мерному процессу. После конечного числа таких «шагов» мы получим некоторый k-мерный процесс $(x_1(t), x_{n_2}(t), \ldots, x_{n_k}(t))$, представляющий собой «часть» $\boldsymbol{x}(t)$, главные миноры $d_i^*(\lambda)$ спектральной матрицы которого не равны нулю тождественно.

Следствие. *Если* $\boldsymbol{x}(t)$ *сингулярен и при этом*

$$d_l^*(\lambda) > 0 \text{ почти всюду для } l = 1, \ldots, k \text{ и } n_k = n, \tag{7}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \dfrac{d_k^*(\lambda)}{d_{k-1}^*(\lambda)}}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Используя условие (7) и определение $x_{n_j}(t)$, легко доказать, что

$$H_j^x \subset H_1^x \text{ для } j = 2, \ldots, n_2 - 1,$$

$H_j^x \subset H_1^x \vee H_{n_2}^x$ для $j = n_2 + 1, \ldots, n_3 - 1$ и т. д. В итоге получаем

$$H_1^x \vee \ldots \vee H_{n-1}^x \vee H_n^x(t) = H_1^x \vee H_{n_2}^x \vee \ldots \vee H_{n_{k-1}}^x \vee H_n^x(t)$$

Из последней формулы и следует (8) (Ср. конец доказательства теоремы 1).

Теорема 2. *Пусть существует такая нумерация компонент* $\boldsymbol{x}(t)$, *что* $d_1(\lambda) > 0, \ldots, d_{k-1}(\lambda) > 0$ *почти всюду, а* $d_k(\lambda) = 0$ *на множестве положительной меры. Пусть также*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log [d_{l-1}(\lambda)/d_{l-2}(\lambda)]}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty; \quad l = 2, \ldots, k; \; d_0(\lambda) = 1, \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \dfrac{d_{km}(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty; \quad m = k+1, \ldots, n, \tag{10}$$

где $d_{km}(\lambda)$ *детерминант спектральной матрицы процесса* $(x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t), x_m(t))$, *а* $d_{k-1}(\lambda)$ *главный минор* $(k-1)$*-го порядка той же матрицы. Тогда процесс* $\boldsymbol{x}(t)$ *сингулярен.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что из (9) следует сингулярность процесса $(x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t))$. Для доказательства этого надо только воспользоваться соотношениями

$$H_1^x \vee \ldots \vee H_{j-1}^x \vee H_j^x(t) = H_1^x \oplus \ldots \oplus H_{j-1}^* \oplus H_j^*(t)$$
$$(j = 2, \ldots, k-1)$$

(см. доказательство теоремы 1), сингулярностью процессов $x_1(t)$, $x_2^*(t)$, ..., $x_{k-1}^*(t)$ и формулой (5). Так как $d_k(\lambda) = 0$ на множество положительной меры, то $x_k^*(t)$ сингулярен, откуда

$$H_1^x(t) \vee \ldots \vee H_k^x(t) = H_1^x \vee \ldots \vee H_k^x.$$

Условие (10) приводит теперь к тому, что и для $m > k$

$$H_1^x(t) \vee \ldots \vee H_{k-1}^x(t) \vee H_m^x(t) = H_1^x \vee \ldots \vee H_{k-1}^x \vee H_m^x.$$

Из последних соотношений сразу следует, что $H^x(t) = H^x$, т. е. что процесс $\boldsymbol{x}(t)$ — сингулярен.

В заключение рассмотрим два примера, относящиеся к случаю двумерных процессов. При разборе этих примеров нам понадобится одна лемма, доказательство которой мы опускаем.

Лемма. *Пусть* $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$ *— двумерный стационарный процесс, такой, что* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *— регулярны, а*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log d_2(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda = -\infty.$$

Процесс $x(t)$ *не будет сингулярным в том и только в том случае, если существует функция* $A(\lambda)$, *предельная для функции класса* N_2 *в нижней полуплоскости, не равная тождественно нулю и такая, что* *

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ \dfrac{\left|A(\lambda)-\dfrac{f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)}\right|^2}{d_2(\lambda)}}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty.$$

Если функция $A(\lambda)$, *удовлетворяющая перечисленным условиям, существует, то она единственна.*

Пример 1. Пусть $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$, где

$$x_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} z_1(d\lambda), \quad f_{11}(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2},$$

$$x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\frac{1}{1+\lambda^2} Z_1(d\lambda) + x_s(t) = x_2^{(1)}(t) + x_s(t),$$

причем спектральная плотность процесса $x_s(t)$ равна $e^{-\lambda^2}$. Имеем:

$$\frac{f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)}=\frac{1}{1+\lambda^2}; \quad d_2(\lambda)=\frac{e^{-\lambda^2}}{1+\lambda^2}.$$

Таким образом условие (4) будет выполнено при любой нумерации компонент. Однако, беря в качестве $A(\lambda)$ функцию $\dfrac{1}{1+\lambda^2}$, видим, что условие леммы выполнено и, следовательно $x(t)$ несингулярен. Кроме того, получаем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\dfrac{1}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

сходится только при $A(\lambda)=\dfrac{1}{1+\lambda^2}$ (имея в виду $A(\lambda)$ должна быть граничным значением некоторой функции на N_2).

Пример. 2. Несколько более сложен пример сингулярного процесса, не удовлетворяющего условиям теоремы 2 ни при какой нумерации компонент.

* Определение класса N_2 см. в [2].

Пусть $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$, причем $x_1(t)$ и $x_s(t)$ определяем, как и выше, а

$$x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\frac{f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)}Z_1(d\lambda)+x_s(t),$$

где

$$\frac{f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda^2} & \text{при } \lambda<0,\\ \dfrac{2}{1+\lambda^2} & \text{при } \lambda>0.\end{cases}$$

Процесс $x(t)$ не удовлетворяет условиям теоремы 2, так как обе его компоненты регулярны, а в теореме 2 предполагается, что во всяком случае первая компонента сингулярна. Покажем, что тем не менее процесс $x(t)$ сингулярен. Определитель $d_2(\lambda)=\frac{e^{-\lambda^2}}{1+\lambda^2}$ таков, что условие леммы не выполнено ни для $A(\lambda)\equiv\frac{1}{1+\lambda^2}$, ни для $A(\lambda)\equiv\frac{2}{1+\lambda^2}$.

Допустим, что существует все же функция $A(\lambda)$, отличная от двух последних, являющаяся граничным значением некоторой функции из N_2 и удовлетворяющая условиям леммы, т. е. такая, что

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda+\int_{0}^{\infty}\frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty. \qquad (11)$$

Так как оба интеграла положительны, то они сходятся. Рассмотрим теперь разность между суммой этих интегралов и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda. \qquad (12)$$

Интеграл (12), как уже указывалось выше, расходится. Рассматриваемая разность равна:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda-\int_{0}^{\infty}\frac{\log^+\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda.$$

Пусть

$$S_k=\left\{\lambda: e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{k}{1+\lambda^2}\right|^2>1\right\}\cap(0,\infty),\quad k=1,2.$$

Тогда

$$I=\int\limits_{S_2-S_1}\frac{\log\left[e^{\lambda_2}\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda+\int\limits_{S_2\cap S_1}\frac{2\log\left|\frac{A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}}{A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}}\right|}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$-\int\limits_{S_1-S_2}\frac{\log\left[e^{\lambda^2}\left|A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right|^2\right]}{1+\lambda^2}d\lambda=I_1+I_2+I_3.$$

Интеграл I_1 сходится, поскольку сходится второй интеграл в соотношении 11); I_2 сходится, поскольку под знаком логарифма стоит функция, являющаяся граничным значением функции класса N_1. Остается интеграл I_3:

$$I_3=\int\limits_{S_1-S_2}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}d\lambda+\int\limits_{S_1-S_2}\frac{2\log\left|A(\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right|}{1+\lambda^2}d\lambda=I_{31}+I_{32}.$$

Интеграл I_{32} сходится по той же причине, что и I_2. Для I_{31} имеем:

$$0\leqslant I_{31}\leqslant\int\limits_{\overline{S_2}}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}d\lambda,$$

где $\overline{S_2}$ — дополнение к S_2 в $(0,\infty)$. На S_2 имеем $\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|^2<e^{-\lambda^2}$, что влечет $\lambda^2<-2\log\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\overline{S_2}}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}d\lambda<-\int\limits_{\overline{S_2}}\frac{2\log\left|A(\lambda)-\frac{2}{1+\lambda^2}\right|}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty,$$

так как под знаком log стоит функция, предельная для функции класса N_2. Таким образом, I_{31} также сходится. Итак, разность I конечна, что противоречит условию (11) и расходимости интеграла (12). Следовательно, соотношение (11) не выполнено ни при какой $A(\lambda)$, являющейся предельной для функции класса N_2. Поэтому по лемме процесс $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$ сингулярен.

Поступила в редакцию
10.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, Успехи матем. наук, **XIII**, 2 (1958).

[2] Ю. А. Розанов, Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем, ДАН СССР, **125**, 2 (1959).

SUR LES PROCESSUS SINGULARS VECTORIELLES STATIONNAIRES

R. F. MATVEEV (MOSKOU)

(*Resumé*)

Le théorème 1 de cette article donne une condition necessaire de singularité de processus stationnaire vectorielle.

Dans le théorème 2 est demontrée une condition suffisante pour que le processu vectorielle stationnaire etait singular.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1960
Том V Выпуск 1

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

II. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

А. В. СКОРОХОД

Предлагаемая работа непосредственно примыкает к работе [1], в которой изучался вопрос о дифференцируемости мер, соответствующих процессам с независимыми приращениями. Здесь находятся достаточные условия, при которых меры, соответствующие двум марковским процессам, определяемым стохастическими дифференциальными уравнениями, были абсолютно непрерывны одна относительно другой, а также вычисляется плотность одной меры по отношению к другой.

1. Мы будем рассматривать марковские процессы $\xi(t)$, определенные на $[t_0, T]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$. Определяться эти процессы будут с помощью уравнения:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \sum_1^m \int_{t_0}^t b_k(s, \xi(s))\, dw_k(s) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(u, s, \xi(s))\, q(du \times ds) + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(u, s, \xi(s))\, p(du \times ds). \qquad (1)$$

В этом уравнении $\xi(t)$ — неизвестная функция; $w_k(t)$ — независимые между собой винеровские процессы, $\mathbf{M}w_k(t) = 0$, $\mathbf{D}w_k(t) = t - t_0$ $p(A)$ и $q(A)$ случайные меры, определенные на борелевских множествах пространства $R^{(m)} \times [t_0, T]$, при чем для не пересекающихся $A_1, A_2, \ldots, A_k$ величины $p(A_1), \ldots, p(A_k), q(A_1), \ldots, q(A_k)$ независимы и не зависят от $w_i(t)$; $p(A)$ распределено по закону Пуассона с параметром $\int_{A \cap \{|u| \geqslant 1\}} \frac{du d\tau}{|u|^{m+1}}$, ($u$ как и в (1) обозначает точку $R^{(m)}$, du элемент объема $R^{(m)}$) $q(A) +$ $+ \int_{A \cap \{|u|<1\}} \frac{du d\tau}{|u|^{m+1}}$ имеет также пуассоновское распределение с параметром $\int_{A \cap \{|u|<1\}} \frac{du d\tau}{|u|^{m+1}}$; $b_k(t, x)$, $a(t, x)$, $f(u, t, x)$ — функции, определенные при $t \in [t_0, T]$, $x \in R^{(m)}$, $u \in R^{(m)}$ и принимающие значения из $R^{(m)}$; $\xi(t_0)$ величина не зависящая от $w_k(t)$, $p(A)$ и $q(A)$.

Почти дословно повторяя рассуждения К. Ито в [3], можно доказать, что уравнение (1) имеет единственное решение, с вероятностью 1 не имеющее разрывов второго рода и являющееся процессом Маркова, если выполнены условия:

а) функции $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $f(u, t, x)$ непрерывны по t,

б) существует K, такое что при всех $x \in R^{(m)}$, $y \in R^{(m)}$

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + \sum_1^m |b_k(t, x) - b_k(t, y)|^2 + \int_{|u|<1} \frac{|f(u, t, x) - f(u, t, y)|^2}{|u|^{m+1}}\, du \leqslant$$

$$\leqslant K|x - y|^2,$$

в) $\mathbf{M}|\xi(t_0)|^2 < \infty$,

г) при некотором K_1 для всех $x \in R^{(m)}$

$$\int \frac{|f(u, t, x)|^2}{|u|^{m+1}}\, du \leqslant K_1(|x|^2 + 1).$$

При этом будет также удовлетворяться неравенство $\sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{M}|\xi(s)|^2 < \infty$.

Возьмем теперь произвольное разбиение отрезка $[t_0, T]$: $\alpha = \{t_0, t_1, \ldots, t_l = T\}$.

Определим процесс $\xi^{(\alpha)}(t)$ с помощью соотношений:

$$\xi^{(\alpha)}(t) = \xi^{(\alpha)}(t_k) + \int_{t_k}^t a(t_k, \xi^{(\alpha)}(t_k))\, ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^t b_j(t_k, \xi^{(\alpha)}(t_k))\, du_j(s) +$$

$$+ \int_{t_k}^t \int_{R^{(m)}} f(u, t_k, \xi^{(\alpha)}(t_k))\, p(du \times ds) + \int_{t_k}^t \int_{R^{(m)}} f(u, t_k, \xi^{(\alpha)}(t_k))\, q(du \times ds), \qquad (2)$$

при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\xi^{(\alpha)}(t_0) = \xi(t_0)$.

Используя оценки, обычно применяемые в теории стохастических дифференциальных уравнений (см. [2], [3], [4]), можно доказать, что имеет место

Лемма 1. *Если выполнены условия* а) — г), *то процесс* $\xi^{(\alpha)}(t)$, *определяемый соотношением* (2), *будет при каждом* $t \in [t_0, T]$ *сходиться по вероятности к решению уравнения* (1), *при* $\max\limits_k (t_{k+1} - t_k) \to 0$.

2. В этом пункте рассмотрим некоторые общие положения, относящиеся к абсолютной непрерывности вероятностных мер, в частности мер, соответствующих марковским процессам.

Лемма 2. *Пусть конечномерные распределения процессов* $\xi_n(t)$ *и* $\eta_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям процессов* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *соответственно, а* $P_1^{(n)}$, P_1, $P_2^{(n)}$ *и* P_2 *меры в пространстве функций, соответствующие процессам* $\xi_n(t)$, $\xi(t)$, $\eta_n(t)$ *и* $\eta(t)$. *Пусть далее мера* $P_1^{(n)}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $P_2^{(n)}$ *при всех* n, $\frac{dP_1^{(n)}}{dP_2^{(n)}}(x(t))$ *плотность* $P_1^{(n)}$ *относительно* $P_2^{(n)}$ *и*

$$\lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \mathbf{P}\left\{\left|\log \frac{dP_1^{(n)}}{dP_2^{(n)}}(\eta_n(t))\right| > N\right\} = 0. \qquad (3)$$

Тогда мера P_2 абсолютно непрерывна относительно меры P_1.

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что для всякого цилиндрического множества $\mathfrak{A}$

$$P_2^{(n)}(\mathfrak{A}) = e^N P_1^{(n)}(\mathfrak{A}) + \mathbf{P}\left\{\left|\log \frac{dP_1^{(n)}}{dP_2^{(n)}}(\eta_n(t))\right| > N\right\}$$

и значит

$$P_2(\mathfrak{A}) \leqslant e^N P_1(\mathfrak{A}) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}\left\{\left|\log \frac{dP_1^{(n)}}{dP_2^{(n)}}(\eta_n(t))\right| > N\right\}. \qquad (4)$$

Для вычисления плотности одной меры относительно другой нам понадобится

Лемма 3. *Пусть процессы $\xi_n(t)$, $\xi(t)$, $\eta_n(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяют условиям леммы 2 и, кроме того, существует $\frac{dP_2^{(n)}}{dP_1^{(n)}}$. Если $\xi_n(t) \to \xi(t)$, $\eta_n(t) \to \eta(t)$, $\frac{dP_2^{(n)}}{dP_1^{(n)}}(\xi_n(t)) \to \rho$ по вероятности, то $\rho = \frac{dP_2}{dP_1}(\xi(t))$.* Доказательство этой леммы не представляет затруднений для читателя, владеющего основными сведениями из теории меры, и поэтому мы его опускаем.

Наконец отметим еще одно очевидное предложение.

Лемма 4. *Пусть P_1 и P_2 меры на некотором поле γ. Если существует последовательность множеств $\mathfrak{B}_n$, такая что $P_1(\mathfrak{B}_n) > 0$, $P_2(\mathfrak{B}_n) \to 1$ и меры $P_2(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_n)$ абсолютно непрерывны относительно мер $P_1(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_n)$, то и мера P_2 будет абсолютно непрерывна относительно меры P_1.*

Рассмотрим теперь два марковских процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, определенных на промежутке $[t_0, T]$. Обозначим $P_i(x, t_1, t_2, \mathfrak{A})$ условную меру, соответствующую процессу $\xi_i(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ при условии, что $\xi_i(t_1) = x$, $\mathfrak{A}$ — множество в функциональном пространстве. Предположим, что для всех x и $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$ $P_2(x, t_1, t_2, \mathfrak{A})$ абсолютно непрерывна относительно $P_1(x, t_1, t_2, \mathfrak{A})$, причем

$$\frac{dP_2(x, t_1, t_2;)}{dP_1(x, t_1, t_2;)}(x(t)) = \rho(x, t_1, t_2, x(t)),$$

кроме того, $\mathbf{P}\{\xi_2(t_0) \in dx\}$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}\{\xi_1(t_0) \in dx\}$, и $\frac{\mathbf{P}\{\xi_2(t_0) \in dx\}}{\mathbf{P}\{\xi_1(t_0) \in dx\}} = \rho_0(x)$. Тогда легко проверить, что, если P_i мера, соответствующая процессу $\xi_i(t)$, α — произвольное разбиение $[t_0, T]$, то

$$\log \frac{dP_2}{dP_1}(\xi_1(t)) = \log \rho_0(\xi_1(t_0)) + \sum_0^{l-1} \log \rho(\xi_1(t_k), t_k, t_{k+1}, \xi_1(t)). \qquad (5)$$

Обозначим далее P_i^τ меру, соответствующую процессу $\xi_i(t)$ на $[t_0, \tau]$. Тогда $\log \frac{dP_2^\tau}{dP_1^\tau}(\xi_1(t))$ будет некоторым случайным процессом. Из формулы (5) немед-

ленно вытекает, что процесс, определяемый парой $\left(\xi_1(\tau),\ \log\frac{dP_2^\tau}{dP_1^\tau}(\xi_1(t))\right)$, будет марковским процессом.

3. В этом пункте будут найдены достаточные условия для абсолютной непрерывности меры P_2, соответствующей процессу $\xi_2(t)$ относительно меры P_1, соответствующей процессу $\xi_1(t)$, если $\xi_i(t)$, $i=1,\ 2$, определяется уравнением (1), в котором функции $a(t,\ x)$, $b_k(t,\ x)$, $f(u,\ t,\ x)$ заменены соответственно функциями $a_i(t,\ x)$, $b_k^{(i)}(t,\ x)$, $f_i(u,\ t,\ x)$. Относительно $a_i(t,\ x)$, $b_k^{(i)}(t,\ x)$, $f_i(u,\ t,\ x)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям а) — г).

Рассмотрим два семейства однородных процессов с независимыми приращениями $\eta_{t,x}^{(1)}(s)$, $\eta_{t,x}^{(2)}(s)$, определенных при $s\geqslant t$ по формулам

$$\eta_{t,x}^{(i)}(s)=\int_t^s a_i(t,\ x)\,d\tau+\sum_{k=1}^m\int_t^s b_k^{(i)}(t,\ x)\,dw_k(\tau)+$$

$$+\int_t^s\int_{R^{(m)}} f_i(u,\ t,\ x)\,q(du\times d\tau)+\int_t^s\int_{R^m} f_i(u,\ t,\ x)\,p(du\times d\tau). \qquad (6)$$

Предположим теперь, что мера $P_{t,x}^{(1)}$, соответствующая процессу $\eta_{t,x}^{(1)}(s)$ при всех t и x абсолютно непрерывна относительно меры $P_{t,x}^{(2)}$, соответствующей процессу $\eta_{t,x}^{(2)}(s)$. Как вытекает из теоремы А работы [1], для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$\alpha)$ $\sum_1^m (b_k^{(1)},\ z)^2=\sum_1^m (b_k^{(2)},\ z)^2$, $z\in R^{(m)}$ здесь $(x,\ y)$ — скалярное произведение,

$\beta)$ вектор $\Delta(t,\ x)=a_1(t,\ x)-a_2(t,\ x)+\int\limits_{|u|<1}\frac{f_2(u,\ t,\ x)-f_1(u,\ t,\ x)}{|u|^{m+1}}\,du$

является линейной комбинацией векторов $b_1^{(1)}(t,\ x)$, $b_2^{(1)}(t,\ x)$, $\ldots$, $b_m^{(1)}(t,\ x)$,

$\gamma)$ существует такая функция $\pi(u,\ t,\ x)$, что для всякого A

$$\int\limits_{f_1(u,\ t,\ x)\in A}\frac{du}{|u|^{m+1}}=\int\limits_{f_2(u,\ t,\ x)\in A}\pi(u,\ t,\ x)\frac{du}{|u|^{m+1}},$$

$\delta)$ $\int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|\leqslant\frac{1}{2}}(\pi(u,\ t,\ x)-1)^2\frac{du}{|u|^{m+1}}<\infty,$

$\varepsilon)$ $\int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)|>\frac{1}{2}}|\pi(u,\ t,\ x)-1|\frac{du}{|u|^{m+1}}<\infty.$

На основании теоремы Б из [1] заключаем, что при выполнении условий $\alpha)$ — $\varepsilon)$ характеристическая функция величины

$$\log\frac{dP_{x,t}^{(1)}}{dP_{x,t}^{(2)}}(\eta_{t,x}^{(2)}(s)),$$

$\eta^{(i)}_{t,x}(s)$ рассматриваются на отрезке $[t,\ t+h]$), будет определяться формулой

$$\log \mathbf{M}\exp\left[i\lambda \log \frac{dP^{(1)}_{t,x}}{dP^{(2)}_{t,x}}(\eta^{(2)}_{t,x}(s))\right] = h\left[-\frac{i\lambda}{2}\alpha(t,\ x) - \frac{\lambda^2}{2}\alpha(t,\ x) + \right.$$

$$+ i\lambda \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|\leqslant \frac{1}{2}} [\log - \pi(u,\ t,\ x) + 1 - \pi(u,\ t,\ x)] \frac{du}{|u|^{m+1}} +$$

$$+ i\lambda \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|> \frac{1}{2}} (1 - \pi(u,\ t,\ x) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \tag{7}$$

$$\left. + \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|> \frac{1}{2}} (e^{i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}}\right],$$

$$+ \int\limits_{|\pi(u,\ t\ ,\ x)-1|\leqslant \frac{1}{2}} (e^{i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x)} - 1 - i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x) \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

де $\alpha(t,\ x) = \min \sum\limits_{k=1}^{m} [\lambda_k(t,\ x)]^2$, если $\Delta(t,\ x) = \sum\limits_{1}^{m} \lambda_k(t,\ x)\, b^{(2)}_k(t,\ x)$, а $\pi(u,\ t,\ x)$, то же, что в γ). Из последней формулы легко усмотреть, что

$$\log \frac{dP^{(1)}_{t,x}}{dP^{(2)}_{t,x}}(\eta^{(2)}_{t,x}(s)) = \varphi_{t,x}(h) + \psi_{t,x}(h) + \chi_{t,x}(h), \tag{8}$$

де

$$\chi_{t,x}(h) = h\left[-\frac{1}{2}\alpha(t,\ x) + \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|> \frac{1}{2}} (1 + \pi(u,\ t,\ x)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|\leqslant \frac{1}{2}} (\log \pi(u,\ t,\ x) + 1 - \pi(u,\ t,\ x)) \frac{du}{|u|^{m+1}}\right], \tag{9}$$

величины $\varphi_{t,x}(h)$ и $\psi_{t,x}(h)$ имеют характеристические функции, определяемые отношениями

$$\log \mathbf{M}\, e^{i\lambda\varphi_{t,x}(h)} = h\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\alpha(t,\ x) + \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|\leqslant \frac{1}{2}} (e^{i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x)} - 1 - \right.$$

$$\left. - i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x)) \frac{du}{|u|^{m+1}}\right\}, \tag{10}$$

$$\log \mathbf{M}\, e^{i\lambda\psi_{t,x}(h)} = h \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|> \frac{1}{2}} (e^{i\lambda \log \pi(u,\ t,\ x)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \tag{11}$$

ведем далее величины

$$\beta(t,\ x) = \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|\leqslant \frac{1}{2}} (\log \pi(u,\ t,\ x))^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}, \tag{12}$$

$$\gamma(t,\ x) = \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|> \frac{1}{2}} |\log \pi(u,\ t,\ x)| \frac{du}{|u|^{m+1}}, \tag{13}$$

$$\delta(t,\ x) = \int\limits_{|\pi(u,\ t,\ x)-1|>\frac{1}{2}} |\pi(u,\ t,\ x)-1|\,\frac{du}{|u|^{m+1}}. \tag{14}$$

Очевидны неравенства

$$|\chi_{t,x}(h)| \leqslant h[\alpha(t,\ x)+\beta(t,\ x)+\delta(t,\ x)], \tag{15}$$

$$\mathbf{M}\,\varphi_{t,x}(h)=0,\ \mathbf{D}\,\varphi_{t,x}(h)\leqslant h[\alpha(t,\ x)+\beta(t,\ x)], \tag{16}$$

$$\mathbf{M}\,|\psi_{t,x}(h)| \leqslant h\gamma(t,\ x). \tag{17}$$

Лемма 5. *Если*

$$\int\limits_{t_0}^{T} \sup_x (\alpha(t,\ x)+\beta(t,\ x)+\gamma(t,\ x)+\delta(t,\ x))\,dt < \infty \tag{18}$$

и распределение $\xi_2(t_0)$ абсолютно непрерывно относительно распределения $\xi_1(t_0)$, то мера P_2 абсолютно непрерывна относительно меры P_1.

Доказательство. Пусть процессы $\xi_i^{(\alpha)}(t)$, $i=1,\ 2$, определяются формулой (2), если в ней заменить функции $a(t,\ x)$, $b_k(t,\ x)$, $f(u,\ t,\ x)$ соответственно на $a_i(t,\ x)$, $b_k^{(i)}(t,\ x)$, $f_i(u,\ t,\ x)$ и $\xi_i^{(\alpha)}(t_0)=\xi_i(t_0)$, а последовательность разбиений такова, что

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sup_x (\alpha(t_k,\ x)+\beta(t_k,\ x)+\gamma(t_k,\ k)+\delta(t_k,\ x))(t_{k+1}-t_k) < C \tag{19}$$

и $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant l}(t_{k+1}-t_k)\to 0$. Существование такой постоянной и такой последовательности подразделений вытекает из (18). Очевидно, что

$$\xi_i^{(\alpha)}(t) = \xi_i^{(\alpha)}(t_k) + \eta^{(i)}_{t_k,\ \xi_i^{(\alpha)}(t_k)}(t), \text{ при } t\in[t_k,\ t_{k+1}], \tag{20}$$

Поэтому на основании (5), принимая во внимание (8), можем написать

$$\log\frac{dP_1^{(\alpha)}}{dP_2^{(\alpha)}}(\xi_2^{(\alpha)}(t)) = \log\bar{\rho}_0(\xi_2(t_0)) + \sum_{k=0}^{l-1}[\varphi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}t_k}(t_{k+1}-t_k) +$$

$$+\psi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}(t_k)}(t_{k+1}-t_k)+\chi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}(t_k)}(t_{k+1}-t_k)],$$

где $\bar{\rho}_0(x)$ плотность меры $\mathbf{P}\{\xi_1(t_0)\in A\}$ относительно меры $\mathbf{P}\{\xi_2(t_0)\in A\}$, а $P_i^{(\alpha)}$ — мера, соответствующая $\xi_i^{(\alpha)}t$:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\log\frac{dP_1^{(\alpha)}}{dP_2^{(\alpha)}}(\xi_2^{(\alpha)}(t))\right|>N\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\log\bar{\rho}_0(\xi_2(t_0))\right|>\frac{N}{4}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=0}^{l-1}\varphi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}(t_k)}(t_{k+1}-t_k)\right|>\frac{N}{4}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=0}^{l-1}\psi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}(t_k)}(t_{k+1}-t_k)\right|>\frac{N}{4}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=0}^{l-1}\chi_{t_k,\ \xi_2^{(\alpha)}(t_k)}(t_{k+1}-t_k)\right|>\frac{N}{4}\right\}.$$

Учитывая формулы (15), (16), (17), заключаем, что при $N \geqslant 4C(T-t_0)$.

$$\mathbf{P}\left\{\left|\log\frac{dP_1^{(\alpha)}}{dP_2^{(\alpha)}}(\xi_2^{(\alpha)}(t))\right| > N\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\log\overline{\rho}_0(\xi(t_0))\right| > \frac{N}{4}\right\} + \frac{16C}{N^2} + \frac{4C}{N}. \quad (21)$$

Конечномерные распределения процессов $\xi_i^{(\alpha)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процессов $\xi_i(t)$, ввиду леммы 1. Из (21) вытекает формула (3), и значит для доказательства леммы достаточно применить лемму 2.

Нам понадобиться еще одна лемма, которая, несмотря на кажущуюся очевидность, имеет весьма громоздкое доказательство, которое нам ввиду размеров статьи придется опустить. Заметим, что доказательство аналогичного предложения для диффузионных процессов содержится в статье Дуба [5].

Лемма 6. *Пусть процессы* $\xi(t)$ *и* $\widetilde{\xi}(t)$ *определяются уравнением* (1) *с функциями* $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $f(u, t, x)$ *и* $\widetilde{a}(t, x)$, $\widetilde{b}_k(t, x)$, $\widetilde{f}(u, t, x)$, *удовлетворяющими условиям* а) — г). *Пусть далее при* $|x| \leqslant R$, $a(t, x) = \widetilde{a}(t, x)$, $b_k(t, x) = \widetilde{b}_k(t, x)$, $f(u, t, x) = \widetilde{f}(u, t, x)$ *и* $\xi(t_0) = \widetilde{\xi}(t_0)$. *Обозначим через* τ *такую величину, что* $|\xi(t)| < R$ *при* $t < \tau$, $\xi(\tau + 0) \geqslant R$, *а* $\widetilde{\tau}$ *определяется аналогично по процессу* $\widetilde{\xi}(t)$. *Тогда каковы бы ни были* $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ *из* $[t_0, T]$ *и борелевские множества* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *из* $R^{(n)}$, *имеет место равенство:*

$$\mathbf{P}\{\xi(s_1) \in A_1, \ldots, \xi(s_k) \in A_k, \tau > s_k\} = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}(s_1) \in A_1, \ldots, \widetilde{\xi}(s_k) \in A_k, \widetilde{\tau} > s_k\}.$$

Теорема. *Если для всякого* $R > 0$

$$\int_{t_0}^{T} \sup_{|x| \leqslant R} (\alpha(t, x) + \beta(t, x) + \gamma(t, x) + \delta(t, x))\, dt < \infty$$

и меры $\mathbf{P}\{\xi_1(t_0) \in A\}$ *и* $\mathbf{P}\{\xi_2(t_0) \in A\}$ *абсолютно непрерывны одна относительно другой, то* P_2 *будет абсолютно непрерывна относительна* P_1.

Доказательство. Рассмотрим наряду с процессами $\xi_i(t)$ процессы $\widetilde{\xi}_i(t)$, удовлетворяющие уравнению (1) с коэффициентами

$$\widetilde{a}_i(t, x) = g(x)\, a_i(t, x), \qquad \widetilde{b}_h^{(i)}(t, x) = g(x)\, b_k^{(i)}(t, x), \qquad \widetilde{f}_i(u, t, x) = g(x)\, f_i(u, t, x),$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R, \\ 1 + R - |x|, & R \leqslant |x| \leqslant R + 1, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Если обозначить $\widetilde{\alpha}(t, x)$, $\widetilde{\beta}(t, x)$, $\widetilde{\gamma}(t, x)$, $\widetilde{\delta}(t, x)$, $\widetilde{\pi}(u, t, x)$ величины, определенные в соответствии с (7), (12), (13), (14) для процессов $\widetilde{\xi}_i(t)$, то легко видеть, что при $|x| < R + 1$ $\widetilde{\alpha}(t, x) = \alpha(t, x) g(x)$, $\widetilde{\pi}(u, t, x) = \pi(u, t, x)$, $\widetilde{\beta}(t, x) = \beta(t, x)$, $\widetilde{\gamma}(t, x) = \gamma(t, x)$, $\widetilde{\delta}(t, x) = \delta(t, x)$, а при $|x| \geqslant R + 1$ $\widetilde{\alpha}(t, x) = 0$, $\widetilde{\pi}(u, t, x) = 1$, $\widetilde{\beta}(t, x) = \widetilde{\gamma}(t, x) = \widetilde{\delta}(t, x) = 0$. Поэтому для процессов $\widetilde{\xi}_i(t)$ выполняются условия леммы 5, так как

$$\sup_x (\widetilde{\alpha}(t, x) + \widetilde{\beta}(t, x) + \widetilde{\gamma}(t, x) + \widetilde{\delta}(t, x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x| \leqslant R+1} (\alpha(t, x) + \beta(t, x) + \gamma(t, x) + \delta(t, x)).$$

Значит мера $\widetilde{P}_2$, соответствующая процессу $\widetilde{\xi}_2(t)$, будет абсолютно непрерывна относительно меры $\widetilde{P}_1$, соответствующей процессу $\widetilde{\xi}_1(t)$. Но из леммы 6 вытекает, что для всякого цилиндрического множества $\mathfrak{A}$

$$P_i(\mathfrak{A} \cap \{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_i(t)| \leqslant R\}) = \widetilde{P}_i(\mathfrak{A} \cap \{\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\widetilde{\xi}^i(t)| \leqslant R\}).$$

Для доказательства теоремы остается применить лемму 4.

4. Найдем теперь выражение для плотности меры P_2 относительно меры P_1. Пусть процессы $\gamma_{t,x}^{(i)}(s)$, $i = 1, 2$ задаются формулой (6). Предположим, что существует $\overline{\pi}(u, t, x)$, такое, что

$$\int\limits_{f_2(u,t,x)\in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} = \int\limits_{f_1(u,t,x)\in A} \overline{\pi}(u, t, x) \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

причем для $\overline{\pi}(u, t, x)$ выполнены условия δ) и ε). Пусть кроме того при каждом t и x векторы $b_k^{(1)}(t, x)$ ортогональны. Тогда из теоремы Б работы [1] легко вывести, что

$$\log \frac{dP_{t,x}^{(2)}(h)}{dP_{t,x}^{(1)}(h)}(\gamma_{t,x}^{(1)}(s)) = \overline{a}(t, x)h + \sum_{k=1}^{m} \int_t^{t+h} \overline{\lambda}_k(t, x)\, dw_k(s) +$$

$$+ \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \log \overline{\pi}(u, t, x)\, q(du \times ds) + \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \log \overline{\pi}(u, t, x)\, p(du \times ds), \quad (22)$$

где

$$\overline{a}(t, x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda}_k^2(t, x) + \int_{|u|<1} [\log \overline{\pi}(u, t, x) + 1 - \overline{\pi}(u, t, x)] \frac{du}{|u|^{m+1}} +$$

$$+ \int_{|u|>1} (1 - \overline{\pi}(u, t, x)) \frac{du}{|u|^{m+1}}, \quad (23)$$

$\overline{\lambda}_k(t, x)$ таковы, что $-\Delta(t, x) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda}_k(t, x) b_k(t, x)$ и, наконец, $P_{t,x}^{(i)}(h)$ — мера, соответствующая процессу $\gamma_{t,x}^{(i)}(s)$ на отрезке $[t, t+h]$. На основании формулы (5) можем записать для процессов $\xi_j^{(\alpha)}(t)$

$$\log \frac{dP_2^{(\alpha)}}{dP_1^{(\alpha)}}(\xi_1^{(\alpha)}(l)) = \log \rho(\xi_1^{(\alpha)}(t_0)) + \sum_{k=0}^{l-1} \overline{a}(t_k, \xi_1^{(\alpha)}(t_k))(t_{k+1} - t_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{l-1} \overline{\lambda}_i(t_k, \xi_1^{(\alpha)}(t_k))[w_i(t_{k+1}) - w_i(t_k)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \overline{\pi}(u, t_k, \xi_1^{(\alpha)}(t_k))\, q(du \times ds) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \overline{\pi}(u, t_k, \xi_1^{(\alpha)}(t_k))\, p(du \times ds). \quad (24)$$

Используя формулу (24), а также лемму 1 можно показать, что при

$$\max_k (t_{k+1} - t_k) \to 0 \log \frac{dP_2^{(\alpha)}}{dP_1^{(\alpha)}} (\xi_1^{(\alpha)}(t))$$

будет сходиться по вероятности к величине

$$\log \rho_0(\xi_1(t_0)) + \int_{t_0}^{T} \bar{a}(t, \xi_1(t))\, dt + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} \bar{\lambda}_k(t, \xi_1(t))\, dw_k(t) +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \int_{R^{(m)}} \log \bar{\pi}(u, t, \xi_1(t))\, p(du \times ds) + \int_{t_0}^{T} \int_{R^{(m)}} \log \bar{\pi}(u, t, \xi_1(t))\, q(du \times ds), \quad (25)$$

если только выполнены условия:

1) существует такое K, что

$$|\bar{a}(t, x) - \bar{a}(t, y)|^2 + \sum_{k=0}^{m} |\lambda_k(t, x) - \lambda_k(t, y)|^2 +$$

$$+ \int_{|u|<1} |\log \bar{\pi}(u, t, x) - \log \bar{\pi}(u, t, y)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leqslant K |x - y|^2,$$

2) $$\int [\log \bar{\pi}(u, t, x)]^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < K(|x|^2 + 1),$$

3) $\bar{a}(t, x)$, $\bar{\lambda}_k(t, x)$, $\log \bar{\pi}(u, t, x)$ непрерывны по t.

Если потребовать, чтобы выполнялись условия теоремы, то используя лемму 3, можно показать, что $\log \frac{dP_2}{dP_1}(\xi_1(t))$ выражается формулой (25).

Поступила в редакцию
15.7.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Скороход, Теория вероят. и ее примен., 2, 4 (1957).
[2] И. И. Гихман, Укр. матем. журнал, 2, 4 (1950).
[3] K. Ito, Mem. Am. Math. Soc., № 4 (1951).
[4] Maruyama, Rend. Circ. Math. Palermo, 4 (1955), 1—43.
[5] I. Doob, Trans. Am. Math. Soc., 78 (1955), 168—208.

ON DIFFERENTIABILITY OF MEASURES WHICH CORRESPOND TO MARKOV PROCESSES

A. V. SKOROKHOD (KIEV)

(Summary)

The conditions for the differentiability of measures that correspond to Markov processes are investigated and the density of one measure with respect to the other is calculated.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том V 1960 Выпуск 1

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

К. В. МАСЛОВ

§ 1. Введение

Целью настоящей работы является решение следующей предельной задачи. Пусть имеется последовательность серий независимых случайных величин

$$\xi_{n,1};\ \xi_{n,2};\ \ldots\ \xi_{n,k_n}\ (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

и некоторая функция двух переменных $\varphi(x,\ y)$. Пусть далее случайные величины $\zeta_{n,k}$ определены рекуррентным образом так, что

$$\zeta_{n,1} = \xi_{n,1};\ \zeta_{n,k+1} = \varphi(\zeta_{n,k};\ \xi_{n,k+1})\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_n - 1).$$

Мы ставим задачу об отыскании достаточных условий существования предельного распределения величин ζ_{n,k_n} и выяснения вида этого распределения. Подобная задача, даже в более общем случае, когда $\varphi(x,\ y)$ может зависеть от n, k была рассмотрена С. Н. Бернштейном, но исследовалась только задача о сходимости к предельному закону, определяемому переходными вероятностями марковского процесса, удовлетворяющими уравнению А. Н. Колмогорова. Им была получена теорема существования для этого уравнения и следовательно существование некоторого класса марковских процессов. Заметим, что несколько иной подход к последнему вопросу и более общие результаты содержатся в работах И. И. Гихмана [7,8].

В нашей работе мы получим распределения более общего вида, чем рассмотренные С. Н. Бернштейном, и иным методом.

Поясним основную идею нашего подхода на простом примере. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ с математическими ожиданиями равным нулю и дисперсиями равными единице, функции распределения которых мы обозначим через $F_k(x)$. Предположим, что мы хотим доказать соответствующую предельную теорему для случайной величины

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

с функцией распределения $P_n(x)$. В наших обозначениях все это означает,

то $\varphi(x, y) = x + y$ и $\xi_{n,k} = \frac{\xi_k}{\sqrt{n}}$. Пусть $f(x)$ — ограниченная и достаточно ладкая функция, а

$$P_n * f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, dP_n(y).$$

Обозначим через $T^{(n,k)}$ оператор

$$T^{(n,k)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{y}{\sqrt{n}}\right) dF_k(y).$$

Тогда $P_n * f = T^{(n,n)} T^{(n,n-1)} \dots T^{(n,1)} f$.

Рассмотрим оператор $\widetilde{T}^{(n,k)} = \exp\{A^{(n,k)}\}$, где

$$A^{(n,k)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f\left(x - \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - f(x) \right) dF_k(y).$$

Заметим, что оператор $A^{(n,k)}$ в определенном смысле мал). Мы имеем:

$$\widetilde{T}^{(n,k)} = E + A^{(n,k)} + \frac{1}{2!}(A^{(n,k)})^2 + \dots = T^{(n,k)} + \frac{1}{2}(A^{(n,k)})^2 + \dots$$

следовательно, операторы $\widetilde{T}^{(n,k)}$ и $T^{(n,k)}$ совпадают с точностью до величины порядка $(A^{(n,k)})^2$. Пренебрегая этими величинами, мы получим, что

$$P_n * f = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} A^{(n,k)} \right\} f.$$

Вводя параметр t и положив $u_n(t, x) = \exp\left\{ t \sum_{k=1}^{n} A^{(n,k)} \right\} f$ мы будем иметь:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \left(\sum_{k=1}^{n} A^{(n,k)} \right) u_n, \quad u(0, x) = f(x). \tag{2}$$

Так как $A^{(n,k)}$ мы можем записать в виде

$$A^{(n,k)} u = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ то } \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A^{(n,k)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, предельная для $u_n(t, x)$ функция, определяющая предельное распределение, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Легко понять, что поскольку функция $f(x)$ достаточно произвольна, то наш результат эквивалентен соответствующей предельной теореме. Эти формальные рассуждения легко обосновать, показав, что функции $u_n(t, x)$ действительно сходятся к решению уравнения (3). Подчеркнем, что теорема существования для этого уравнения уже считается известной, что сильно облегчает задачу.

Уже в приведенном выше примере усматривается связь предельных законов с марковскими процессами, поскольку уравнения (2) и (3) порождают однородные марковские процессы с независимыми приращениями. Для целей настоящей работы эта связь играет существенную роль. Именно, существование и вычисление предельных распределений в нашей задаче будет всегда связано с некоторым марковским процессом, точнее с решением некоторого дифференциального уравнения в частных производных, определяющего одномерный марковский процесс.

Наводящим соображением для выбора соответствующего дифференциального уравнения служит следующее обстоятельство. В работе К. В. Маслова и А. Я. Повзнера [4] был выяснен в достаточно широких предположениях, общий вид инфинитезимальных операторов одномерного марковского процесса (по поводу определений см. [6]). Из результатов [4] вытекает следующее.

Если $F(t, x, y)$ — функция переходных вероятностей однородного марковского процесса, $T_t f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y F(t, x, y)$ и A — инфинитезимальный оператор процесса, то при некоторых общих предположениях относительно $F(t, x, y)$ оператор A имеет вид

$$Au = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u(x+y) - u(x) - \frac{y}{1+y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{1+y^2}{y^2}\, d_y \sigma(x, y) + \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

где $\sigma(x, y)$ — неубывающая функция y ограниченной вариации. Если обозначить $u(t, x) = T_t f$, то функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad u(0, x) = f(x). \tag{5}$$

Этот результат подсказывает нам тот класс уравнений вида (5), который мы возьмем в качестве определяющего наши предельные распределения.

Существенным для нашего метода является установление теорем существования для уравнения (5). Решение этого вопроса дается в § 4 работы. Правда, мы это сделаем для инфинитезимальных операторов более узкого класса, чем (4), однако достаточного для целей нашей задачи. Заметим, что построение марковского процесса, выполненное К. Ито [5] не отвечает на вопрос о существовании решения уравнения (5). В [5] установлено (см. приложение V), что если оператор T_t построенного процесса переводит дважды дифференцируемые функции в такие же, то выполняется уравнение (5). Но остается открытым вопрос о том, каким условиям должен подчиняться оператор A, чтобы T_t удовлетворял указанному требованию.

Установление теорем существования дает нам возможность получить основные предельные теоремы, суть которых сводится к следующему. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x) - y\varphi_y'(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{d\sigma(y)}{y^2} \tag{6}$$

Если функция $\varphi(x, y)$ такова, что она удовлетворяет условиям сформулированной в § 2 теоремы существования, $\xi_{n,k}$ удовлетворяют определенным условиям малости (средние значения $\xi_{n,k}$ для простоты формулировки мы

читаем равными нулю) и функции $\sigma_n(y) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{y} z^2 dF_{n,k}(z)$ сходятся слабо

неубывающей функции ограниченной вариации $\sigma(y)$, то существует пре-ельное распределение для случайной величины ζ_{n,k_n}. Если $u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d_y P(t, x, y)$ — решение уравнения (6) с начальной функцией $f(x)$ будет доказано, что $P(t, x, y)$ — неубывающая функция y, полная вари-ция которой равна 1), то предельное распределение будет совпадать в основ-ом с функцией $P(1, 0, y)$. Для приведенного выше примера, в качестве ункции $\sigma(y)$ нужно взять функцию постоянную в интервалах $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$ и имеющую единичный скачок в нуле.

Тема этой работы и основная идея метода были указаны автору А. Я. Повзнером, и мы пользуемся случаем, чтобы выразить ему свою скреннюю признательность.

§ 2. Теоремы существования и сходимости решений

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x) - \frac{y}{1+y^2}\varphi'_y(x, 0)\frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{1+y^2}{y^2} d\sigma(y) \qquad (7)$$

начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \qquad (8)$$

Относительно уравнения (7) мы сделаем следующие предположения:

1) $\sigma(y)$ — неубывающая функция, ограниченной вариации на всей оси $\operatorname{Var}\sigma(y) \leqslant K$);

2) $a(x) + \frac{1}{2}\varphi'^2_y(x, 0)(\sigma(+0) - \sigma(-0)) \geqslant 0$ при всех x;

3) $\varphi(x, 0) = x$;

4) Функция $\varphi(x, y)$ имеет ограниченные для всех x и y смешанные производные до 6-го порядка, $a(x)$ и $b(x)$ — ограниченные производные до -го порядка включительно.

Требования 1) — 4) мы назовем условием (B).

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения* (7) *и функция* $\varphi(x, y)$ *удов-летворяют условию* (B), *а начальная функция* $f(x)$ *обладает четырьмя ограниченными и непрерывными производными на всей оси, то уравнение* (7) *имеет единственное решение, представимое в виде:*

$$u(t, x) = T_t f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) d_y P(t, x, y) \qquad (9)$$

такое, что его две производные по x *ограничены равномерно по* $x \in (-\infty, +\infty)$ *и* $t \in (0, T)$.

Семейство операторов T_t образует полугруппу. При этом ядро $P(t, x, y)$ преобразования T_t при фиксированных t и x является функцией распределения, откуда в частности следует, что $\| T_t \| = 1$.

Замечание 1. Теорема 1 остается в силе, когда уравнение (7) имеет вид:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u(t, \varphi) - u(t, x) - y\varphi'_y(x, 0)\frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{d\sigma(y)}{y^2} \tag{7$_1$}$$

Замечание 2. Если вместо уравнения (7) мы имеем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t, \varphi) - u(t, x))\, d\sigma(y) \tag{7$_2$}$$

с начальным условием (8), $\sigma(y)$ — по-прежнему неубывающая функция ограниченной вариации, $f(x)$ имеет k ограниченных и непрерывных производных и первые k производных по x функции $\varphi(x, y)$ ограничены для всех значений x и y и непрерывны, то существует единственное решение $u(t, x) = T_t f$ ($\| T_t \| = 1$) уравнения (7$_2$) и это решение имеет k непрерывных и ограниченных равномерно по $x\,(-\infty < x < +\infty)$ и $t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$ производных по x.

Замечание 3. Пусть мы имеем уравнение вида (7$_2$), в котором $\sigma(y)$ неубывающая функция ограниченной вариации $\varphi(x, 0) = x$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, d\sigma(y) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 d\sigma(y) < c_1.$$

Пусть далее начальная функция $f(x)$ имеет k ограниченных и непрерывных производных ($|f^{(i)}(x)| < c_2$, $i \leqslant k$) и $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные и ограниченные смешанные производные до $k+1$ порядка $\left(\left|\frac{\partial^{i+j}\varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < c_3,\ i + j \leqslant k+1\right)$. Тогда $\left|\frac{\partial^i u(x, y)}{\partial x^i}\right| < c$ для $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и $i \leqslant k$. Константа c зависит лишь от c_1, c_2 и c_3 и не зависит от $\operatorname{Var}\sigma(y)$.

Доказательство всех этих утверждений мы отложим до § 4. Кроме теоремы 1 нам понадобится также теорема, которая позволит судить о сходимости решений уравнений определенного вида к решению предельного уравнения типа (7) по сходимости операторов, стоящих в правых частях этих уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_n u \tag{10}$$

с начальным условием (8), считая, что оператор A_n имеет вид

$$A_n u = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x))\, d\tilde{\sigma}_n(y) +$$

$$+ \varphi'_y(x, 0) \sum_{k=1}^{k_n} (u(t, x + \alpha_{n,k}) - u(t, x)), \tag{11}$$

$\tilde{\sigma}_n(y)$ — неубывающие функции ограниченной вариации, а функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Теорема 2*. *Предположим, что* $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\alpha_{n,k}| \to 0$ *при* $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\alpha_{n,k}| < M \quad \textit{и что}$$

1) *функции* $\sigma_n(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{z^2}{1+z^2} d\tilde{\sigma}_n(z)$ *сходятся в основном к неубывающей функции ограниченной вариации* $\sigma(y)$

2) $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \alpha_{n,k} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{1+y^2} d\tilde{\sigma}_n(y) \to \gamma.$

Тогда решения $u_n(t, x)$ *уравнения* (10) *с начальным условием* (8) *сходятся равномерно по* $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in (0, T)$ *к решению* $u(t, x)$ *уравнения*

$$\frac{du}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x) - \frac{y}{1+y^2} \varphi'_y(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1+y^2}{y^2} d\sigma(y) +$$

$$+ \gamma \varphi'_y(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (12)$$

удовлетворяющему начальному условию (8)**.

Ниже нам понадобится аналогичная теорема для операторов A_n, имеющих несколько иную форму.

Теорема 2а. *Если оператор* A_n *в уравнении* (10) *имеет вид*

$$A_n u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u(t, \varphi) - u(t, x)) d\tilde{\sigma}_n(y) \qquad (13)$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y d\tilde{\sigma}_n(y) = 0$, *а функции* $\sigma_n(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} z^2 d\tilde{\sigma}_n(z)$ *сходятся в основном к неубывающей функции ограниченной вариации* $\sigma(y)$, *то решения уравнения* (10) *с начальным условием* (8) *сходятся равномерно по* $x \in (-\infty, \infty)$ $t \in (0, T)$ *к решению* $u(t, x)$ *уравнения* (6), *удовлетворяющему начальному условию* (8).

Доказательство теоремы 2 мы дадим также в § 4.

§ 3. Основные предельные теоремы

Мы теперь приступим к решению основной задачи. Условимся прежде всего относительно некоторых обозначений. Через C_n будет обозначаться класс функций, имеющих n ограниченных и непрерывных на всей оси производных. Мы будем считать, что норма функций задается как

$$\|f\| = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|.$$

буквами c, M, K будут обозначаться постоянные величины, причем одни и

---

* Эта теорема является следствием более общей теоремы А. В. Скорохода. [10]

** То, что уравнение (10) имеет единственное решение $u(t, x)$, представимое в виде $T_t^{(n)} f$ ($\|T_t^{(n)}\| = 1$) может быть доказано так же, как замечание 2 к теореме 1.

те же буквы могут обозначать различные постоянные в процессе одного и того же доказательства.

Пусть теперь дана последовательность серий независимых случайных величин $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,k_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и функция $\varphi(x, y)$, определенная для всех x, y, монотонная по y, и такая, что $\varphi(x, -\infty) = -\infty$, $\varphi(x, +\infty) = +\infty$, $\varphi(x, 0) = x$.

Положим $\zeta_{n,1} = \xi_{n,1}$, $\zeta_{n,k+1} = \varphi(\zeta_{n,k}, \xi_{n,k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n - 1)$. Нашей задачей является выяснение достаточных условий для существования предельного распределения случайной величины $\zeta_n = \zeta_{n,k_n}$, а также выяснение возможного вида этого распределения. Относительно величин $\xi_{n,k}$ мы будем предполагать, что они бесконечно малы, т. е. если $F_{n,k}(x)$ — функция распределения для $\xi_{n,k}$, то

$$\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{n,k}(x) \to 0, \text{ когда } n \to \infty$$

при любом ε равномерно по k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$. В этом параграфе мы остановимся на случае, когда средние значения $\xi_{n,k}$ равны нулю и $\xi_{n,k}$ имеют конечные дисперсии $\mathbf{D}\xi_{n,k}$.

Обозначим $P_{n,k}(x)$ и $P_n(x)$ функции распределения для $\zeta_{n,k}$ и ζ_n соответственно, и пусть $\tilde{\varphi}(x, z)$ будет функция, обратная по y к $\varphi(x, y)$. Тогда

$$P_{n,k+1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{n,k+1}(\tilde{\varphi}(x, z))\, dP_{n,k}(x).$$

Допустим, что $f \in C_0$, и положим

$$(f, P_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dP_n(x),$$

$$T^{(n,k)} f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x, y))\, dF_{n,k}(y), \quad T^{(n)} = T^{(n,1)} T^{(n,2)} \ldots T^{(n,k_n)}.$$

Имеем:

$$(f, P_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, d_z \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{n,k_n}(\tilde{\varphi}(x, z))\, dP_{n,k_n-1}(x) \Big) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x, y))\, dF_{n,k_n}(y) \Big)\, dP_{n,k_n-1}(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (T^{(n,k_n)} f)\, dP_{n,k_n-1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (T^{(n,2)} T^{(n,3)} \cdot \ldots \cdot T^{(n,k_n)} f)\, dF_{n,1}(x)$$

и если обозначить $u_{n,k}(x) = T^{(n,k_n-k+1)} \cdot \ldots \cdot T^{(n,k_n)} f$, то

$$(f, P_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{n,k_n-1}(x)\, dF_{n,1}(x).$$

Докажем следующую предварительную теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\xi_{n,k}$ *— бесконечно малые случайные величины, имеющие конечные дисперсии* $D\xi_{n,k}$ *и средние значения которых разны нулю. Пусть* $\sum_{k=1}^{n} D\xi_{n,k} \leqslant M$, *а функция* $\varphi(x, y)$ *имеет смешанные непрерывные и ограниченные производные до пятого порядка. Обозначим* $T_t^{(n,k)} f$ *решение уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A^{(n,k)} u, \quad u(0, x) = f(x),$$

где

$$A^{(n,k)} u = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x))\, dF_{n,k}(y)$$

$T_t^{(n)}$ *— оператор, равный* $T_t^{(n,1)} \cdot T_t^{(n,2)} \cdot \ldots \cdot T_t^{(n,k_n)}$. *Тогда для каждой функции* $f \in C_3$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1^{(n)} f - T^{(n)} f \| = 0.$$

Прежде чем доказать это, мы докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если* $f \in C_3$, *то функции* $u_{n,k}(x)$ *трижды непрерывно дифференцируемы. Нормы* $u_{n,k}(x)$ *и их производных ограничены равномерно по* n *и* k.

Доказательство. Если $f \in C_3$, то мы имеем:

$$u_{n,k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{n,k-1}(\varphi(x, y))\, dF_{n,k_n-k+1}(y);$$

$$u'_{n,k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'_{n,k-1}(\varphi)\, \varphi'_x\, dF_{n,k_n-k+1}(y),$$

$$u''_{n,k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u''_{n,k-1}(\varphi)\, \varphi'^2_x + u'_{n,k-1}(\varphi)\, \varphi''_{xx})\, dF_{n,k_n-k+1}(y),$$

$$u'''_{n,k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u'''_{n,k-1}(\varphi)\, \varphi'^3_x + 3u''_{n,k-1}(\varphi)\, \varphi'_x \varphi''_{xx} + u'_{n,k+1}(\varphi)\, \varphi'''_{xxx})\, dF_{n,k_n-k+1}(y).$$

Очевидно, что $\| u_{n,k} \| \leqslant \| u_{n,k-1} \| \leqslant \| f \|$. Рассмотрим теперь $\| u'_{n,k} \|$. Выберем δ_0 так, чтобы $\varphi'_x(x, y)$ была неотрицательна для $|y| \leqslant \delta_0$. Тогда

$$\| u'_{n,k} \| \leqslant \| u'_{n,k-1} \| \Big(\int_{|y|<\delta_0} \varphi'_x(x, y)\, dF_{n,k_n-k+1}(y) + c \int_{|y|\geqslant\delta_0} dF_{n,k_n-k+1}(y) \Big).$$

Далее

$$\int_{|y|<\delta_0} \varphi'_x(x, y)\, dF_{n,k_n-k+1}(y) \leqslant \int_{|y|<\delta_0} dF_{n,k_n-k+1}(y) +$$

$$+ \Big| \int_{|y|<\delta_0} y\, dF_{n,k_n-k+1}(y) \Big| + \sup_{x,y} |\varphi'''_{xyy}| \int_{|y|<\delta_0} y^2 dF_{n,k_n-k+1}(y),$$

и так как

$$\left| \int\limits_{|y|<\delta_0} y dF_{n,k_n-k+1}(y) \right| \leqslant \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{|y|\geqslant\delta_0} y^2 dF_{n,k_n-k+1}(y) \leqslant \frac{1}{\delta_0} \mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1},$$

$$\int\limits_{|y|\geqslant\delta_0} dF_{n,k_n-k+1}(y) \leqslant \frac{1}{\delta_0^2} \mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1},$$

то

$$\| u'_{n,k} \| \leqslant \| u'_{n,k-1} \| (1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}) \leqslant \| f' \| \prod_{i=1}^{k_n} (1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,i}) \leqslant$$

$$\leqslant \| f' \| \exp\left\{ c \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{D}\,\xi_{n,i} \right\} \leqslant \| f' \| e^{cM},$$

и наше утверждение относительно $\| u'_{n,k} \|$ доказано. Для $\| u''_{n,k} \|$ имеем после небольших преобразований

$$\| u''_{n,k} \| \leqslant \| u''_{n,k-1} \| (1 + c_1 \mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}) + c_2 \| u'_{n,k-1} \| \mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}.$$

Поскольку $\| u'_{n,k} \|$ ограничены, мы получаем:

$$\| u''_{n,k} \| \leqslant \| u''_{n,k-1} \| (1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}) + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1} \leqslant$$

$$\leqslant \| u''_{n,k-2} \| (1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1})(1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+2}) + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}(1 + c\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1}) +$$

$$+ c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k+1} \leqslant \| f'' \| c \left(\sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{D}\,\xi_{n,i} \right) \prod_{i=1}^{k_n} (1 + c\,\mathbf{D}\,\xi_{n,i}) \leqslant \| f'' \| cMe^{cM}.$$

Аналогичным образом устанавливается ограниченность $\| u'''_{n,k} \|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Начнем с того, что оценим разность $(T_1^{(n,k)} - T^{(n,k)})f$. Так как $\| A^{(n,k)} \| \leqslant 2$, то

$$T^{(n,k)} = \exp\{tA^{(n,k)}\} = E + tA^{(n,k)} + R^{(n,k)}(t),$$

где

$$\| R^{(n,k)}(t) f \| \leqslant \| (A^{(n,k)})^2 f \| \frac{e^{2t} - 2t - 1}{4} = c(t) \| (A^{(n,k)})^2 f \|.$$

Теперь имеем: $\| (T_1^{(n,k)} - T^{(n,k)}) f \| \leqslant c \| (A^{(n,k)})^2 f \|$, $(c = c(1))$.

Обозначим $A^{(n,k)} f = \psi(x)$. Тогда

$$(A^{(n,k)})^2 f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\psi(\varphi(x, y)) - \psi(x))\, dF_{n,k}(y) = \lim_{B\to\infty} \int\limits_{-B}^{B} \frac{y^2}{2!} (\psi''(x, \theta_B y) \varphi'^2_y(x, \theta_B y) +$$

$$+ \psi'(\varphi(x, \theta_B y)) \varphi''_{yy}(x, \theta_B y))\, dF_{n,k}(y), \quad (0 < \theta_B < 1).$$

Из определения $\psi(x)$ следует:

$$\psi'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f'(\varphi)\varphi'_x(x, y) - f'(x))\, dF_{n,k}(y), \tag{14}$$

$$\psi''(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f''(\varphi)\varphi'^2_x(x, y) + f'(\varphi)\varphi''_{xx}(x, y) - f''(x))\, dF_{n,k}(y). \tag{15}$$

ценим интеграл, стоящий в правой части (15):

$$\int\limits_{|y|\geqslant\delta} \left(f''(\varphi)\varphi_x'^2 + f'(\varphi)\varphi_{xx}'' - f''(x)\right) dF_{n,k}(y) \Big| \leqslant c\left(\|f''\| + \|f'\|\right) \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y)$$

$$\Big| \int\limits_{|y|<\delta} \left(f''(\varphi)\varphi_x'^2 - f'(\varphi)\varphi_{xx}'' - f''(x)\right) dF_{n,k}(y) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int\limits_{|y|<\delta} \left(f''(\varphi) - f''(x)\right) dF_{n,k}(y) \Big| + \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ |y|<\delta}} |1-\varphi_x'^2| \cdot \|f''\| +$$

$$+ \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ |y|<\delta}} |\varphi_{xx}''| \cdot \|f'\| \leqslant \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ |y|<\delta}} |\varphi(x,y)-x| \cdot \|f'''\| +$$

$$+ \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ |y|<\delta}} |1-\varphi_x'^2| \cdot \|f''\| + \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ |y|<\delta}} |\varphi_{xx}''| \cdot \|f'\| \leqslant c\delta\left(\|f'''\| + \|f''\| + \|f'\|\right).$$

Аналогичным образом мы можем оценить интеграл, стоящий в (14):

$$\left(T_1^{(n,k)} - T^{(n,k)}\right) f \| \leqslant c\left(\|f'''\| + \|f''\| + \|f'\|\right)\left(\delta + \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y)\right) \mathbf{D}\,\xi_{n,k}. \quad (16)$$

Если мы теперь в (16) в качестве функции $f(x)$ возьмем $u_{n,k_n-k}(x)$, то благодаря лемме 1, получим

$$\| T_1^{(n,k)} - T^{(n,k)}) u_{n,k_n-k} \| \leqslant c\left(\delta + \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y)\right) \mathbf{D}\,\xi_{n,k}. \quad (17)$$

Положим $u_{n,k}^*(x) = T_1^{(n,k_n-k+1)} \cdot \ldots \cdot T_1^{(n,k_n)} f$. Поскольку $\| T_1^{(n,k)} \| \leqslant 1$, то

$$|u_{n,k+1}(x) - u_{n,k+1}^*(x)| \leqslant |T_1^{(n;k_n-k)}(u_{n,k} - u_{n,k}^*)| +$$

$$+ |(T^{(n,k_n-k)} - T_1^{(n,k_n-k)}) u_{n,k}| \leqslant |u_{n,k} - u_{n,k}^*| +$$

$$+ c\left(\delta + \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k_n-k}(y)\right) \mathbf{D}\,\xi_{n,k_n-k}$$

$$|(T^{(n)} - T_1^{(n)}) f| \leqslant c\left(\delta + \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y)\right) \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{D}\,\xi_{n,k}.$$

Следовательно для $f \in C_3$ мы имеем при $n \to \infty$ $\| (T^{(n)} - T_1^{(n)}) f \| \to 0$, что и заканчивает доказательство теоремы 3.

Следствие. Для того чтобы распределения $P_n(y)$ сходились к предельному, достаточно, чтобы существовал оператор T вида

$$Tf = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P(x, y)$$

с ядром $P(x, y)$, являющимся функцией распределения, и чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1^{(n)} f - Tf \| = 0$$

при каждом $f \in C_k$ для любого фиксированного k. Предельная для $P_n(y)$ функция совпадает тогда в основном с $P(0, y)$.

Действительно, если операторы $T_1^{(n)}$ сходятся к T в указанном смысле, то в силу доказанной теоремы функции $u_{n,k_n}(x)$ сходятся равномерно по x к $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P(x, y)\, (f \in C_k)$, а значит

$$\lim_{n\to\infty} u_{n,k_n}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P(0, y).$$

Так как с другой стороны

$$|(f, P_n) - u_{n,k_n}(0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{n,k_n-1}(\varphi(0, y)) - u_{n,k_n-1}(y))\, dF_{n,1}(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| u'_{n,k_n-1} \| \int_{|y|<\varepsilon} |y|\, dF_{n,1}(y) + 2 \| u_{n,k_n-1} \| \int_{|y|\geqslant\varepsilon} dF_{n,1}(y),$$

то из леммы 1 следует, что $\lim_{n\to\infty} ((f, P_n) - u_{n,k_n}(0)) = 0$, $(f \in C_1)$, и стало быть

$$\lim_{n\to\infty} (f, P_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dP(0, y), \quad (f \in C_k),$$

что достаточно для справедливости нашего утверждения.

Таким образом, вопрос о существовании предельного распределения того или иного вида сводится к изучению сходимости операторов $T_1^{(n)}$ к предельному оператору определенного типа. Заметим, сначала, что если операторы $A^{(n,k)}$ коммутируют между собой, то в этом случае коммутируют также операторы $T_t^{(n,k)}$, и мы можем сказать, что $T_t^{(n)}$ порождается инфинитезимальным оператором

$$A^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} A^{(n,k)}, \tag{18}$$

что приводит к исследованию сходимости операторов $A^{(n)}$ к предельному. Но, вообще говоря, операторы $A^{(n,k)}$ не коммутируют, поэтому мы рассмотрим разность между оператором $\widetilde{T}_t^{(n)} = \exp\{tA^{(n)}\}$ и оператором $T_t^{(n)}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Если* 1) *выполняются условия теоремы* 3,

2) $\lim_{n\to\infty} \| (\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}) f \| = 0$, $(f \in C_k)$

3) *функции* $\sigma_n(y) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{y} z^2 dF_{n,k}(z)$ *сходятся в основном к неубывающей функции ограниченной вариации* $\sigma(y)$,

4) *функция* $\varphi(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы существования* 1, *распределения* $P_n(x)$ *сходятся в основном к предельному распределению* $P(x)$. *Если обозначить* $u(t, x)$ *решение уравнения* (6) *в форме* (9) *с начальным условием* (8), *то* $P(y)$ *совпадает в основном с* $P(1, 0, y)$.

Доказательство. Благодаря условию 2) теоремы и следствию из теоремы 3 для существования предельного распределения достаточно, чтобы операторы $\widetilde{T}_t^{(n)}$ сходились к предельному оператору, представимому с помощью некоторого распределения. Условие же 3) дает нам возможность применить теорему 2а. Эта теорема позволяет установить сходимость $\widetilde{T}_t^{(n)} f$ к решению $u(t, x)$ уравнения (6), что и доказывает теорему.

Условие 2) теоремы 4 выполняется тривиальным образом в случае, когда $\xi_k^{(k)}$ коммутируют между собой. Это имеет место, например, для случая одинаково распределенных в каждой серии случайных величин, а в случае произвольно распределенных величин, когда

$$\varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(\varphi(x, z), y). \tag{19}$$

Поэтому без дальнейших рассмотрений получаем в частности, беря за $\varphi(x, y)$ функцию $x + y$, хорошо известную предельную теорему (достаточные условия) для сумм независимых случайных слагаемых, имеющих дисперсии (см. [1]). Случай произвольной функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей условию (19), мы будем рассматривать, так как в виду группового свойства (19) он фактически сводится к исследованию случая, когда $\varphi(x, y) = x + y$. Предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин мы сформулируем в конце этого параграфа (теорема 8).

В дальнейшем мы займемся отысканием условий, обеспечивающих стремление к нулю разности $\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}$. Прежде всего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2*. *Пусть* A *и* B *— линейные ограниченные операторы и* $\Gamma_t = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A-B)}$. *Тогда, если* $\Gamma_t^{(1)} = e^{tA}B - Be^{tA}$, *то*

$$\Gamma_t = \int_0^t e^{(t-\tau)(A+B)}\,\Gamma_\tau^{(1)} e^{\tau B} d\tau \tag{20}$$

$$\| \Gamma_t^{(1)} f \| \leqslant \int_0^t \| (AB - BA) e^{\tau A} f \|\, d\tau. \tag{21}$$

Доказательство. Дифференцируя Γ_t по t, получаем:

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}e^{tB}B - (A + B)\, e^{t(A+B)} = (A + B)\,\Gamma_t + (e^{tA}B - Be^{tA})\, e^{tB}$$

следовательно,

$$\Gamma_t = \int_0^t e^{(t-\tau)(A+B)} \Gamma_\tau^{(1)} e^{\tau B} d\tau.$$

* Содержание этой леммы было сообщено автору А. Я. Певзнером.

Аналогично для $\Gamma_t^{(1)}$ имеем:

$$\Gamma_t^{(1)} = \int_0^t e^{(t-\tau)A}(AB - BA)\, e^{\tau A} d\tau,$$

откуда

$$\| \Gamma_t^{(1)} f \| \leqslant \int_0^t \| (AB - BA) e^{\tau A} f \| \, d\tau.$$

Кроме леммы 2 для нас будет существенным также следующее легко доказываемое неравенство

$$\| (\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}) f \| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \| (e^{tA^{(n,i)}} \cdot e^{t(A^{(n,i+1)}+\ldots+A^{(n,k_n)})} - e^{t(A^{(n,i)}+\ldots+A^{(n,k_n)})}) f \| . \qquad (22)$$

Положим теперь в лемме 2 $A = A^{(n,i)}$ и $B = \sum_{j=1}^{k_n} A^{(n,j)}$, и будем считать, что $\xi_{n,k}$ удовлетворяют условиям теоремы 3, а функция $\varphi(x, y)$ — условиям теоремы существования 1. Относительно $f(x)$ будем предполагать, что она принадлежит C_5. Если обозначить $e^{\tau B} f = u(\tau, x)$, то в любом конечном интервале изменения τ $u(\tau, x)$ будет иметь пять непрерывных и ограниченных равномерно по i и n производных по x, как это следует из замечания 3 к тероеме 1, а функция $v(\tau; \tau_1; x) = e^{\tau_1 A} u(\tau, x)$ также будет иметь пять непрерывных и ограниченных равномерно по k, i, n, x, τ и τ_1 ($-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$) производных по x. Это последнее следует из замечания 2 к теореме 1. Далее (в обозначениях леммы 2):

$$\| \Gamma_t f \| \leqslant \int_0^t \| \Gamma_\tau^{(1)} u(\tau, x) \| \, d\tau, \qquad (23)$$

$$\| \Gamma_\tau^{(1)} u(\tau, x) \| \leqslant \int_0^\tau \| (AB - BA) v(\tau; \tau_1; x) \| \, d\tau_1, \qquad (24)$$

Оценим выражение, стоящее под знаком интеграла в последнем неравенстве. При этом благодаря тому, что функция v и ее пять производных по x ограничены равномерно по τ и τ_1 ($0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau \leqslant T$) и тому, что в наших оценках не будут встречаться производные более высокого порядка, все оценки будут равномерны по τ и τ_1, мы эти переменные в дальнейшем будем опускать.

Мы остановимся на двух условиях, обеспечивающих малость коммутанта $(A^{(n,i)}A^{(n,k)} - A^{(n,k)}A^{(n,i)}) v(\tau; \tau_1; x)$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|y| \geqslant \delta} dF_{n,k}(y) = \mu(n; \delta) \to 0 \qquad (25$$

при любом фиксированном δ и $n \to \infty$.

Положим $w(x; y, z) = v(\varphi(\varphi(x, y), z)) - v(\varphi(\varphi(x, z), y))$. Так как $w(x; y, 0) = w(x; 0, z) = 0$, то $\left.\frac{\partial^n w}{\partial y^n}\right|_{z=0} = 0$ и $\left.\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\right|_{y=0} = 0$, а так как $w(x; y, z) =$

$-w(x; z, y)$, то $\left.\frac{\partial^{2n} w}{\partial y^n \partial z^n}\right|_{\substack{y=0 \\ z=0}} = 0$. Поэтому для $|y| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$ будет:

$$w(x; y, z) = \frac{1}{2!} zy^2 \frac{\partial^2 w(x; \theta_2 y, 0)}{\partial z \partial y^2} + \frac{z^2}{2!}\left(y \frac{\partial^3 w(x; 0, 0)}{\partial z^2 \partial y} + \frac{1}{3!} y^3 \frac{\partial^5 w(x; \theta_3 y, 0)}{\partial z^2 \partial y^3}\right) +$$

$$+ \frac{z^3}{3!}\left(y \frac{\partial^4 w(x; 0, \theta_1 z)}{\partial z^3 \partial y} + \frac{1}{2!} y^2 \frac{\partial^5 w(x; \theta_4 y, \theta_1 z)}{\partial z^3 \partial y^2}\right), \quad (0 < \theta_j < 1).$$

одчеркнем, что все фигурировавшие выше производные ограничены для всех ачений аргументов.

Оценим теперь

$$\| A^{(n,i)} A^{(n,k)} - A^{(n,k)} A^{(n,i)}) v \| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(y)\, dF_{n,i}(z) \right\|. \quad (26)$$

збивая область интегрирования на части $(N > 1 > \delta)$

$$\{|y| \geqslant N, |z| \geqslant N\}, \{|y| < N, |z| \geqslant N\}, \{|y| \geqslant N, |z| < N\},$$

$$\{\delta \leqslant |y| < N, |z| < N\}, \ldots$$

используя разложение в ряд Тейлора функции w (например, по y до члена y^2 во второй области) мы с помощью обычных в теории вероятностей енок типа

$$\iint_{|z|<N} z\, dF_{n,k}(z) \Big| \leqslant \frac{1}{N} \mathbf{D}\xi_{n,k}, \quad (27)$$

лучаем в итоге

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z)\, dF_{n,k}(y)\, dF_{n,i}(z) \right| \leqslant c \left\{ \left(\frac{1}{N} + \delta\right) \mathbf{D}\xi_{n,k} \mathbf{D}\xi_{n,i} + \right.$$

$$+ N^3 \mathbf{D}\xi_{n,k} \int_{|y| \geqslant \delta} dF_{n,k}(y) + N^3 \mathbf{D}\xi_{n,i} \int_{|z| \geqslant \delta} dF_{n,i}(z) +$$

$$\left. + \left(\int_{|y| \geqslant \delta} dF_{n,k}(y) \right) \left(\int_{|z| \geqslant \delta} dF_{n,i}(z) \right) \right\}. \quad (28)$$

Из (28), в свою очередь, учитывая ограниченность сумм дисперсий:

$$\sum_{i=1}^{n} \| (A^{(n,i)} A^{(n,k)} - A^{(n,k)} A^{(n,i)}) v \| \leqslant c \left(\frac{1}{N} + \delta + N^3 \mu(n; \delta) + \mu^2(n; \delta) \right). \quad (29)$$

равенства (22), (23), (24) и (29) дают возможность заключить

$$\| (\tilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}) f \| \leqslant c \left(\frac{1}{N} + \delta + N^3 \mu(n; \delta) + \mu^2(n; \delta) \right), \quad (f \in C_5). \quad (30)$$

агодаря этому последнему неравенству мы можем теперь доказать следую-ую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\xi_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ *случайные величины, средние значения оторых равны нулю и пусть при любом фиксированном* $\delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|y|\geqslant\delta} y^2 dF_{n,k}(y) = \nu(n;\delta) \to 0, \quad n \to \infty \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|y|<\delta} y^2 dF_{n,k}(y) \to 1; \quad n \to \infty, \tag{32}$$

а функция $\varphi(x, y)$ *удовлетворяет требованиям теоремы существования* *. *Тогда существует предельная для* $P_n(y)$ *функция распределения, совпадающая в основном с функцией* $P(1, 0, y)$, *где* $P(t, x, y)$ *определяется решением* $u(t, x)$ *в форме* (9) *уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\varphi'^2_y(x, 0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(x, 0)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{33}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mu(n;\delta) = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y) \leqslant \frac{\nu(n,\delta)}{\delta^2}.$$

Следовательно, условие (31) обеспечивает (25). Обратимся теперь к (30). Устремляя в (30) n к бесконечности, мы получим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| (\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}) f \| \leqslant$ $\leqslant c\left(\frac{1}{N} + \delta\right)$. Так как δ и N произвольны, то это дает $\lim\limits_{n\to\infty} \| (\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}) f \| = 0$, ($f \in C_b$). Таким образом выполняется условие 2 теоремы 4. Так как при $n \to \infty$

$$\int\limits_{|y|\geqslant\delta} dF_{n,k}(y) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{|y|\geqslant\delta} y^2 dF_{n,k}(y) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|y|\geqslant\delta} y^2 dF_{n,k}(y) \to 0,$$

то $\xi_{n,k}$ — бесконечно малые случайные величины и стало быть условия нашей теоремы гарантируют также выполнение условий 1 и 3 теоремы 4. Следовательно существует предельное распределение, определяемое уравнением (6). Но в силу условий (31) и (32) $\sigma(y)$ является несобственным распределением и предельное уравнение имеет вид (30), что и требовалось доказать.

Отметим еще один факт, вытекающий из доказанной теоремы. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность случайных величин со средними значениями, равными нулю, и пусть $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k$. Предположим, что выполняется условие Линдеберга, т. е. $\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqslant\delta B_n} x^2 dF_k(x) \to 0$, когда $n \to \infty$ при любом фиксированном δ. Если мы теперь обозначим $\xi_{n,k} = \frac{1}{B_n}\xi_k$, то к полученной последовательности серий случайных величин будет применима теорема 6. Таким

* На самом деле для этой теоремы требования гладкости на функцию $\varphi(x, y)$ могут быть значительно снижены, но мы на этом не будем останавливаться.

образом условие Линдеберга гарантирует существование предельного закона распределения не только в случае сумм независимых случайных величин, но в случае произвольной функции $\varphi(x, y)$. Это предельное распределение определяется уравнением (33). Этот результат вытекает также из работы С. Н. Бернштейна [3].

Теперь мы приведем еще одно условие, обеспечивающее стремление к нулю разности $\widetilde{T}_t^{(n)} - T_t^{(n)}$. Предположим, что выполняется следующее соотношение при $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dF_{n,k}(y) \sum_{i=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \mid d\left(F_{n,k}(z) - F_{n,i}(z)\right) \mid = \lambda(n) \to 0. \tag{34}$$

В силу ранее сделанных предположений относительно ограниченности сумм дисперсий величина $\lambda(n)$ в (34) ограничена для всех n. Условие (34) требует определенной близости распределений $F_{n,k}$ и $F_{n,i}$, притом наиболее жестким образом для значений аргумента лежащих вне конечной окрестности нуля.

Благодаря тому, что для введенной на стр. 66 функции $w(x; y, z)$ имеем $w(x; y, z) = -w(x; z, y)$, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(y)\, dF_{n,i}(z) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(y)\left(dF_{n,i}(z) - dF_{n,k}(z)\right) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(z)\left(dF_{n,k}(y) - dF_{n,i}(y)\right).$$

Для функции $w(x; y, z)$ при $|y| \leqslant N$ и $|z| \leqslant N$ мы можем написать разложение $(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$:

$$w(x; y, z) = z\frac{\partial w(x; y, 0)}{\partial z} + \frac{z^2}{2!}\left(y\frac{\partial^2 w(x; 0, \theta_1 z)}{\partial z^2 \partial y} + \frac{y^2}{2!}\frac{\partial^4 w(x; \theta_2 y, \theta_1 z)}{\partial z^2 \partial y^2}\right).$$

Далее, легко видеть, что

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(y)\, dF_{n,i}(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left|\lim_{N\to\infty}\int_{|y|\leqslant N}\int_{|z|\leqslant N} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(y)\left(dF_{n,i}(z) - dF_{n,k}(z)\right)\right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left|\lim_{N\to\infty}\int_{|y|\leqslant N}\int_{|z|\leqslant N} w(x; y, z)\, dF_{n,k}(z)\left(dF_{n,k}(y) - dF_{n,i}(y)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{\infty}^{+\infty} y^2 dF_{n,k}(y)\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \mid d\left(F_{n,i}(z) - F_{n,k}(z)\right) \mid\right).$$

Это дает вместе с (22), (23) и (24):

$$\| (\widetilde{T}_1^{(n)} - T_1^{(n)}) f \| \leqslant c\lambda(n). \tag{35}$$

Теорема 6. *Пусть $\xi_{n,k}$ — бесконечно малые случайные величины со средними значениями равными нулю. Пусть, кроме того, выполняется условие* (34) *и функции* $\sigma_n(y) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{y} z^2 dF_{n,k}(z)$ *слабо сходятся к неубывающей функции ограниченной вариации* $\sigma(y)$, *а функция* $\varphi(x, y)$ *удовлетворяет требованиям теоремы существования* 1. *Тогда существует предельная для* $P_n(y)$ *функция распределения, совпадающая в основном с* $P(1, 0, y)$, *где* $P(t, x, y)$ *определяется решением* $u(t, x)$ *в форме* (9) *уравнения* (6) *удовлетворяющим начальному условию* (8).

Доказательство. Из неравенства (35) следует, что выполняется условие 2 теоремы 4. Три ее других условия также выполняются в силу условий нашей теоремы. Применяя теорему 4, мы немедленно завершаем доказательство.

Факты, приведенные в этом параграфе, могут быть обобщены на случай, когда случайные величины $\xi_{n,k}$ не имеют дисперсий и средних значений. Однако, чтобы не увеличивать объема работы, мы приведем соответствующие теоремы без доказательств.

Пусть $A^{(n,k)}$ будет оператор вида:

$$A^{(n,k)}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\varphi(x, y)) - f(x)\}\, dF^*_{n,k}(y) + \varphi'_y(x, 0)(f(x + \alpha_{n,k}) - f(x)), \qquad (36)$$

где $$\alpha_{n,k} = \int_{|x|<\tau} x dF_{n,k} \quad \text{и} \quad F^*_{n,k}x = F_{n,k}(x + \alpha_{n,k}).$$

Как и прежде $T_t^{(n,k)} = \exp\{tA^{(n,k)}\}$ и $T_t^{(n)} = T_t^{(n,1)} \cdot T_t^{(n,2)} \ldots T_t^{(n,k_n)}$.

Теорема 7. *Пусть $\xi_{n,k}$ — бесконечно малые случайные величины и*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{n,k}(x) \leqslant M_1, \quad \sum_{k=1}^{k_n} |\alpha_{n,k}| \leqslant M_2, \qquad (37)$$

а функция $\varphi(x,y)$ имеет смешанные непрерывные и ограниченные производные до пятого порядка. Тогда для каждой функции $f \in C_3$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_1^{(n)}f - T^{(n)}f \| = 0.$$

Эта теорема является обобщением теоремы 3. Следствие из теоремы 3 и теорема 4 обобщаются очевидным образом.

Мы теперь сформулируем соответствующую предельную теорему для равнораспределенных в каждой серии случайных величин.

Теорема 8. *Пусть $\xi_{n,k}$ — бесконечно малые и равнораспределенные в каждой серии случайные величины с функцией распределения $F_n(x)$ и пусть* $\alpha_n = \int_{|x|<\tau} x dF_n(x)$. *Тогда, если*

1) *функции* $\sigma_n(y) = k_n \int_{-\infty}^{y} \frac{z^2}{1+z^2} dF_n(z)$ *сходятся в основном к некоторой неубывающей функции ограниченной вариации* $\sigma(y)$

2) $|k_n\alpha_n| < M$;

3) $k_n\left(\alpha_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{1+y^2}\, dF_n(y)\right) \to \gamma$;

4) *функция* $\varphi(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы существования* 1, *существует предельное распределение для* $P_n(y)$, *совпадающее в основ-м с функцией* $P(1, 0, y)$, *определяемой решением вида* (9) *уравнения* (12) *начальным условием* (8).

На других обобщениях теорем этого параграфа мы останавливаться не дем. Заметим еще только следующее.

Пусть нам задана последовательность независимых случайных величин $\xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ Положим $\xi_{n,k} = \frac{\xi_k}{B_n}$ ($B_n \to \infty$ при $n \to \infty$). Если $\varphi(x, y) = x + y$, то функция $\sigma(y)$ не может быть в этом случае произвольной, и получаем в качестве предельных лишь устойчивые законы. Так как уравнении (37) функция $\sigma(y)$, являясь пределом $\sigma_n(y)$, не зависит от $\varphi(x, y)$, предельный закон для ζ_n определяется только такими функциями $\sigma(y)$, торые при $\varphi(x, y) = x + y$ дают устойчивые законы.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сделаем некоторые мечания и докажем вспомогательные утверждения. Мы будем опираться дальнейшем на результаты известной работы В. Феллера [3]. Приведем которые результаты этой работы, нужные нам в дальнейшем. Пусть D означает оператор $a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du \tag{38}$$

начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \tag{39}$$

сюду в дальнейшем мы будем считать, что $f(x) \in C_4$. Из результатов § 2 боты В. Феллера следует, что если коэффициенты в уравнении (38) удов-творяют условию A: $a, \frac{1}{a}, a'(x), a''(x), b'(x)$ существуют, ограничены удовлетворяют условию Липшица, то существует единственное решение $t, x)$ уравнения (38) с начальным условием (39) и

$$u(t, x) = T_t f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, U(t, x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P(t, x, y). \tag{40}$$

ри этом функция $P(t, x, y) = \int_{\infty}^{y} U(t, x, z)\, dz$ представляет собой при иксированных t и x функцию распределения, а семейство операторов T_t — олугруппу. Из свойств функции $U(t, x, y)$ вытекает, что $\frac{du}{dx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а сле-овательно и $\frac{\partial u}{\partial t}$ ограничены для всех x и $t \in [0, T]$. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du - c(x)\, u \tag{41}$$

с начальным условием (39) и ограниченной функцией $c(x)$, удовлетворяющей условию Липшица, согласно В. Феллеру, также имеет единственное решение

$$u(t, x) = S_t f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \overline{U}(t, x, y)\, dy \quad (\| S_t \| < c) \tag{42}$$

и если $c(x) \geqslant 0$, то и $\overline{U}(t, x, y) \geqslant 0$.

Так же как и для (38) производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ ограничены для всех x и $t \in [0, T]$. Если мы рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du + \psi(t, x) \tag{43}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du - c(x)u + \psi(t, x) \tag{44}$$

с начальным условием

$$u(0, x) = 0, \tag{45}$$

а относительно $\psi(t, x)$ предположим, что она имеет первые непрерывные и ограниченные производные, то эти уравнения будут иметь единственное решение, которое можно представить в виде

$$u(t, x) = \int_0^t T_{t-\tau} \psi(\tau, x)\, d\tau \tag{46}$$

для (43) и для (44).

$$u(t, x) = \int_0^t S_{t-\tau} \psi(\tau, x)\, d\tau.$$

Из свойств ядра $U(t, x, y)$ вытекает кроме того, что

$$\left.\begin{aligned} \| u(t, x) \| &\leqslant \int_0^t \| \psi(\tau, x) \|\, d\tau, \\ \left\| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right\| &\leqslant c \int_0^t \| \psi(\tau, x) \|\, (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ \left\| \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right\| &\leqslant c \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi(\tau, x)}{\partial x} \right\| (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Знак нормы здесь относится к пространственной переменной при фиксированном t. Наконец, отметим, что

$$\lim_{N \to \infty} \int_{|y| \geqslant N} U(t, x, y)\, dy = 0 \tag{48}$$

равномерно по t и x из конечных интервалов.

Пусть теперь B будет оператор такой, что

$$Bf = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\varphi(x, y)) - f(x)\}\, c(x, y)\, d\sigma(y),$$

де функция $\sigma(y)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на всей си. Возьмем уравнение *

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du + Bu, \tag{49}$$

, следуя в основном В. Феллеру, докажем следующее предложение.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(x, 0) = x$; $c(x, y)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial c}{\partial x}$ *существуют и являются непрерывными и ограниченными функциями для всех значений* x *и* y *пусть* $c(x, y) \geqslant 0$. *Тогда уравнение* (49) *с начальным условием* (39) *имеет единственное решение*

$$u(t, x) = T_t^{(B)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P^{(B)}(t, x, y), \tag{50}$$

функция $P^{(B)}(t, x, y)$ *является по* y *функцией распределения.*

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t, x) = \int_0^t T_{t-\tau}(Bu)\, d\tau + T_t f. \tag{51}$$

Для (51) благодаря ограниченности операторов T_t и B, теорема существования оказывается методом последовательных приближений. Обычным образом станавливается теорема единственности. Если положить

$$u_0(t, x) = T_t f, \quad u_{n+1}(t, x) = \int_0^t T_{t-\tau}(Bu_n(\tau, x))\, d\tau,$$

о решение уравнения (51) представится в виде:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x). \tag{52}$$

При этом $\| u_n(t, x) \| \leqslant \frac{c^n t^n}{n!} \| f \|$. Поэтому согласно (47) для $n > 0$

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\| \leqslant c \int_0^t \| u_{n-1}(\tau, x) \| (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leqslant c^n \frac{2t^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)!} \| f \|,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial x^2} \right\| \leqslant c \int_0^t \left\| \frac{\partial u_{n-1}(\tau, x)}{\partial x} \right\| (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leqslant c^n \frac{2t^{n-1}}{(n-1)!} \| f \|.$$

Так как $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ ограничены, то из этих неравенств следует существова-

* Уравнения типа (49) с «возмущенным» оператором в правой части в абстрактном случае изучались Р. Филлипсом [9].

ние и ограниченность $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ для $x \in (-\infty, +\infty)$ и $t \in (0, T)$. Но из этого немедленно следует, что найденное решение уравнения (51) является также решением (50). Поскольку всякое решение (50) будет в то же время решением (51), то из единственности решения последнего вытекает единственность решения (50).

Покажем, что неотрицательным начальным условиям отвечает неотрицательное решение уравнения (50). Пусть

$$\left.\begin{aligned} &u_{0,0} = f(x) \geqslant 0 \\ &u_{k,0} = 0 \qquad\qquad \text{для } k \neq 0 \\ &u_{k,n} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{для } k > n \text{ и } k < 0 \\ &u_{k,n+1} = \int_0^t T_{t-\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_{k,n}(t, x)\, c(x, y)\, d\sigma(y) + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{k-1,n}(t, \varphi)\, c(x, y)\, d\sigma(y)\right). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k,n}$ совпадает с $u_n(t, x)$. Кроме того из (53) следует: $0 \leqslant u_{k,n} \leqslant C_n^k \frac{c^n t^n}{n!} \| f \|$.

Поэтому мы можем записать:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_{k,n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{k,k+n}.$$

Полагая $v_k(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{k,k+n}$, получим $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, x)$.

Покажем, что $v_k \geqslant 0$ для всех k. При $k = 0$ имеем:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = Dv_0 - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} c(x, y)\, d\sigma(y)\right) v_0,$$

следовательно, $v_0 \geqslant 0$ благодаря (42); для $k > 0$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = Dv_k - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} c(x, y)\, d\sigma(y)\right) v_k + \int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1}(t, \varphi)\, c(x, y)\, d\sigma(y)$$

и, следовательно, $v_k = \int_0^t S_{t-\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1}(\tau, \varphi(x, y))\, c(x, y)\, d\sigma(y)\right) d\tau$, откуда и следует, что все $v_k \geqslant 0$.

Установим теперь существование такой функции $P^{(B)}(x, y)$, что

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dP^{(B)}(t, x, y).$$

ля этого докажем сначала следующий факт: для интервала любой конеч-й длины $(-a, a)$ и числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что если ограни-нная начальная функция $f(x)$ обращается в нуль в интервале $(-N, N)$, то $u(t, x) \mid \leqslant \varepsilon$ для $-a < x < a$; $0 \leqslant t \leqslant T$. Для функции $u_0(t, x)$ это сле-ет из (48). Для $u(t, x)$ это можно доказать так. В силу (48) при произ-льном ε можно найти такое B, что когда $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то

$$\int_{|y|>B} U(t, x, y)\, dy < \varepsilon.$$

усть B выбрано; зафиксируем еще A так, чтобы

$$\left| \int_{|y|>A} (u_0(t, \varphi(x, y)) - u_0(t, x))\, c(x, y)\, d\sigma(y) \right| < \varepsilon \sup_{x, y} [c(x, y)]$$

я всех x. Имеем кроме того $(0 < \theta < 1)$:

$$\int_{|y|\leqslant A} \{u_0(t, \varphi) - u_0(t, y)\}\, c(x, z)\, d\sigma(z) =$$

$$= \int_{|y|\leqslant A} \{u_0(t, y + z\varphi'_z(y, \theta z)) - u_0(t, y)\}\, c(x, z)\, d\sigma(z)$$

сли N выбрано так, что $| u_0(t, y) | \leqslant \varepsilon$ при $-B - A \sup_{y,z} | \varphi'_z | \leqslant y \leqslant B + A \sup_{y,z} | \varphi'_z |$, то при $| y | \leqslant B$

$$\left| \int_{|y|\leqslant A} \{u_0(t, \varphi) - u_0(t, y)\}\, c(x, z)\, d\sigma(z) \right| \leqslant 2\varepsilon \sup_{x,y} (c(x, y)) \operatorname{Var}_\sigma(y).$$

этому для $-a \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant t \leqslant T$

$$| u_1(t, x) | = \left| \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(t - \tau, x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(\tau, \varphi(y, z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - u_0(\tau, y))\, c(y, z)\, d\sigma(z) \right\} dy \right| \leqslant 2 \sup_{x,y} (c(x, y)) \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_0 \| \cdot \operatorname{Var}_\sigma(y) \cdot T \cdot \varepsilon +$$

$$+ \left| \int_0^t d\tau \int_{-B}^{B} \left\{ U(t - \tau, x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(\tau, \varphi(y, z)) - u_0(\tau, y))\, c(y, z)\, d\sigma(z) \right\} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y} (c(x, y)) (2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_0 \| \cdot \operatorname{Var}_\sigma(y) \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \operatorname{Var}_\sigma(y)) T,$$

и доказывает наше утверждение для $u_1(t, x)$. Аналогичным образом оно дует для любого $u_n(t, x)$. Если теперь учесть, что ряд (52) сходится номерно, то мы получим этот же результат и для $u(t, x)$.

Возьмем множество функций из C_4, обращающихся в ноль вне фиксирован-о интервала $(-b, b)$. Тогда для функций этого класса

$$u(t, x) = \int_{-b}^{b} f(y)\, dP_b(t, x, y), \qquad (54)$$

и так как для $f(x) \geqslant 0$ имеем $u(t, x) \geqslant 0$, то $P_b(t, x, y)$ — неубывающа функция y. Устремляя b к бесконечности, мы получим функцию $P^{(B)}(t, x, y)$ определенную уже для всех y и имеющую ограниченную вариацию на все оси. Покажем, что $u(t, x)$ имеет представление (50) для любой начальной функции из C_4. Пусть t и x фиксированы ($t = t_0$, $x = x_0$), ε — произвольное положительное число и $f(x) \in C_4$. Найдем число N так, чтобы для любой функции $\psi(x) \in C_4$, равной нулю в интервале $(-N, N)$ и такой, что $\|\psi\| \leqslant 2\|f\|$ было 1) $|u(t, x)| < \varepsilon$ при $|x| \leqslant |x_0|$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 2) $\int\limits_{|y| \leqslant N} f(y)\, dP^{(B)}(t, x, y) < \varepsilon$. Пусть далее $f_N \in C_4$ такова, что $\|f_N\| \leqslant \|f\|$ и f_N совпадает с $f(x)$ в интервале $(-N, N)$ и обращается в нуль для $|x| \geqslant N + 1$. Тогда

$$u(t, x) = T_t f_N + T_t(f - f_N) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_N(y)\, dP^{(B)}(t, x, y) + T_t(f - f_N) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dP^{(B)}(t, x, y) + \int\limits_{|y| > N} (f_N(y) - f(y))\, dP^{(B)}(t, x, y) + T_t(f - f_N).$$

Но два последние слагаемые меньше 3ε и в силу произвольности ε отсюда следует (54). Так как функции $f(x) \equiv 1$ отвечает решение $u(t, x) \equiv 1$, т полная вариация $P^{(B)}(t, x, y)$ равна 1 и лемма полностью доказана.

Используя лемму 3, мы докажем сейчас еще одно вспомогательно утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\sigma_1(y)$ и $\sigma_2(y)$ — неубывающие функции ограниченно вариации. Функция $\varphi(x, y)$ имеет смешанные ограниченные производные б 6-го порядка, $\varphi(x, 0) = x$, а функция $a(x) \geqslant 0$ и $b(x)$ ограничены и имею ограниченные производные до 4-го порядка. Пусть еще число α таково, чт $1 - 4\,|\, y\varphi''_{yx}(x, 0)\,| > 0$ для $|y| \leqslant \alpha$. Тогда уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (a(x) + \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \frac{u(t, \varphi) - u(t, x) - y\varphi'_y(x, 0)\dfrac{\partial u}{\partial x}}{y^2}\, d\sigma_1(y) +$$

$$+ \int\limits_{|y| > \alpha} (u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x))\, d\sigma_2(y) \qquad (55$$

с начальным условием (39) имеет единственное решение $u_\varepsilon(t, x) = T_t^\varepsilon f =$ $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P^\varepsilon(t, x, y)$, где $P^\varepsilon(t, x, y)$ при фиксированных t и x является функцией распределения. Производные $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)$ су ществуют и ограничены равномерно по ε, $-\infty < x < +\infty$ и $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Перепишем уравнение (55) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (a(x) + \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{|y| \geqslant \varepsilon} (u(t, \varphi(x, y)) - u(t, x))\, d\sigma_\varepsilon(y), \qquad (56$$

ложив

$$b_\varepsilon(x) = b(x) + \varphi'_y(x, 0) \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{y}\, d\sigma(y)$$

$$\sigma_\varepsilon(y) = \begin{cases} \sigma_2(y) & |y| > \alpha, \\ \int\limits_{-\alpha}^{y} \frac{1}{z^2}\, d\sigma_1(z) & -\alpha \leqslant y \leqslant -\varepsilon, \\ -\int\limits_{-y}^{\alpha} \frac{1}{z^2}\, d\sigma_1(z) & \varepsilon \leqslant y \leqslant \alpha. \end{cases}$$

ри этом $\operatorname{Var} \sigma_\varepsilon(y) \leqslant K(\varepsilon)$ ($K(\varepsilon)$, вообще говоря, может возрастать, когда $\to 0$). Согласно лемме 3 уравнение (56) имеет единственное решение $(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_y P^\varepsilon(t, x, y)$, удовлетворяющее начальному условию (39). Оценим перь производные решения $u_\varepsilon(t, x)$. Продифференцируем уравнение (55) фор-льно по x, обозначив $v_\varepsilon(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon(t, x)$. В результате после несложных еобразований, мы будем иметь для $v_\varepsilon(t, x)$ уравнение:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} = (a(x) + \varepsilon) \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} + (b(x) + a'(x)) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} +$$

$$+ \int\limits_{\alpha \leqslant |y| \leqslant \varepsilon} \frac{(1 + y\varphi''_{yx}(x, 0))(v_\varepsilon(t, \varphi(x, y)) - v_\varepsilon(t, x)) - y\varphi'_y(x, 0) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}}{y^2}\, d\sigma_1(y) +$$

$$+ \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \varphi_1(x, y) v_\varepsilon(t, \varphi(x, y))\, d\sigma_1(y) + b'(x) v_\varepsilon(t, x) +$$

$$+ \int\limits_{|y| > \alpha} (v_\varepsilon(t, \varphi(x, y)) \varphi'_x(x, y) - v_\varepsilon(t, x))\, d\sigma_2(y) \qquad (57)$$

начальным условием

$$v_\varepsilon(0, x) = f(x). \qquad (58)$$

ложим $\varphi_1(x, y) = \{\varphi'_x(x, y) - 1 - y\varphi''_{yx}(x, 0)\} \frac{1}{y^2}$. Уравнение

$$\frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial t} = (a(x) + \varepsilon) \frac{\partial^2 v_{1\varepsilon}}{\partial x^2} + (b(x) + a'(x)) \frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x} +$$

$$+ \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \frac{(1 + y\varphi''_{yx}(x, 0))(v_{1\varepsilon}(t, \varphi(x, y)) - v_{1\varepsilon}(t, x)) - y\varphi'_y(x, 0) \frac{\partial v_{1\varepsilon}}{\partial x}}{y^2}\, d\sigma_1(y)$$

агодаря лемме 3 $(1 + y\varphi''_{yx}(x, 0) > 0$ в силу выбора $\alpha)$, имеет решение $v_{1\varepsilon}(t, x) = T_t^{1\varepsilon} f_1$, $v_{1\varepsilon}(0, x) = f_1(x)$ такое что $\| T_t^{1\varepsilon} \| = 1$.

Рассматривая интегральное уравнение

$$v_\varepsilon(t, x) = \int_0^t T_{t-\tau}^{1\varepsilon}\Big(\int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \varphi_1(x, y)\, v_\varepsilon(\tau, \varphi)\, d\sigma_1(y) + b'(x)\, v_\varepsilon(\tau, x) + \\ + \int\limits_{|y|>\alpha} (v_\varepsilon(\tau, \varphi)\, \varphi_x' - v_\varepsilon(\tau, x))\, d\sigma_2(y)\Big)\, d\tau + T_t^{1\varepsilon} f' \tag{59}$$

и решая его методом последовательных приближений, мы получим, что оно имеет единственное решение и $(0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\| v_\varepsilon(t, x) \| \leqslant \| f' \|\, e^{Tc}, \tag{60}$$

где c не зависит от ε.

Так как уравнение (59) эквивалентно уравнению (57) с начальным условием (58), то полученное неравенство оценивает как раз решение уравнения (57). Полагая

$$\bar{u}_\varepsilon(t, x) = \int_0^x v_\varepsilon(t, x)\, dx + u_\varepsilon(t, 0),$$

мы непосредственной проверкой убеждаемся, что $\bar{u}_\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет уравнению (55) и начальному условию (39). В силу теоремы единственности $\bar{u}_\varepsilon(t, x)$ совпадает с $u_\varepsilon(t, x)$, следовательно, действительно $v_\varepsilon(t, x) = \dfrac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial x}$.

Продифференцируем теперь формально уравнение (55) два раза по x, обозначив $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(t, x)}{\partial x^2} = w_\varepsilon(t, x)$. После некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} = (a(x) + \varepsilon)\, \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2} + (b(x) + 2a'(x))\, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + \\ + \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \frac{(1 + 2y\varphi''_{yx}(x, 0))\, w_\varepsilon(t, \varphi) - w_\varepsilon(t, x) - y\varphi'_y(x, 0)\, \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}}{y^2}\, d\sigma_1(y) + \tag{61}$$

$$+ \varphi'''_{yxx}(x, 0) \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \left(\frac{1}{y} \int_x^{\varphi(x, y)} w_\varepsilon(t, z)\, dz \right) d\sigma_1(y) + (2b'(x) + a''(x))\, w_\varepsilon(t, x) + \\ + \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \varphi_2(x, y)\, w_\varepsilon(t, \varphi)\, d\sigma_1(y) + \int\limits_{|y|>\alpha} (w_\varepsilon(t, \varphi)\, \varphi_x'^2 - w_\varepsilon(t, x))\, d\sigma_2(y) + \\ + b''(x)\, v_\varepsilon(t, x) + \int\limits_{\alpha \geqslant |y| \geqslant \varepsilon} \varphi_3(x, y)\, v_\varepsilon(t, \varphi)\, d\sigma_1(y) + \int\limits_{|y|>\alpha} v_\varepsilon(t, \varphi)\, \varphi''_{xy}(x, y)\, d\sigma_2(y),$$

где положено

$$\varphi_2(x, y) = \{\varphi'_x(x, y) - 1 - 2y\varphi''_{xy}(x, 0)\}\, \frac{1}{y^2},$$

$$\varphi_3(x, y) = \{\varphi''_{xx}(x, y) - y\varphi'''_{yxx}(x, 0)\}\, \frac{1}{y^2}.$$

ачальное условие для уравнения (61) будет

$$w_\varepsilon(0, x) = f''(x). \tag{62}$$

евидно, что $|\varphi_2(x, y)| < c$, $|\varphi_3(x, y)| < c$ и

$$\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon} \frac{1}{y}\left(\int\limits_x^{\varphi(x,y)} w_\varepsilon(t, z)\,dz\right) d\sigma_1(y)\Bigg| \leqslant \|w_\varepsilon\| \int\limits_{\alpha\geqslant|y|\geqslant\varepsilon} |\varphi(x, y) - x| \frac{d\sigma_1(y)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \|w_\varepsilon\| \sup_{x,y} |\varphi'_x(x, y)| \operatorname{Var} \sigma_1(y) \leqslant c \|w_\varepsilon\|.$$

ли мы возьмем, так же как мы это делали для $v_\varepsilon(t, x)$, сначала «усечен-е» по отношению к (61) уравнение так, чтобы можно было применить мму 3, а затем выпишем соответствующее интегральное уравнение, то мы ожем оценить $w_\varepsilon(t, x)$. Именно, мы получим для $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\|w_\varepsilon(t, x)\| \leqslant e^{Tc}\left(c \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ 0\leqslant t\leqslant T}} |v_\varepsilon(t, x)| + \|f''\|\right).$$

к же как для $v_\varepsilon(t, x)$ убеждаемся, что $w_\varepsilon(t, x) = \dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}$.

Из проделанных оценок и уравнения (55) вытекает, что при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial t}\right| \leqslant c(T).$$

сли мы продолжим подобным образом наши оценки, то без труда получим, о ограничены также $\dfrac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}$ и $\dfrac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4}$, откуда будет следовать ограниченность и $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}$, что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1. Перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{|y|\leqslant\alpha} \frac{u(t, \varphi) - u(t, x) - y\varphi'_y(x, 0)\dfrac{\partial u}{\partial x}}{y^2} d\sigma_1(y) +$$

$$+ \int\limits_{|y|>\alpha} (u(t, \varphi) - u(t, x))\,d\sigma_2(y), \tag{63}$$

ложив при $|y| \leqslant \alpha$ $\sigma_1(y) = \int\limits_{-\alpha}^{y} (1 + z^2)\,d\sigma(z)$, $\sigma_2(y) = -\operatorname{sgn} y \int\limits_{y}^{(\operatorname{sgn} y)\infty} \frac{1+z^2}{z^2} \times$ $d\sigma(z)$ при $|y| > \alpha$ и

$$a_1(x) = a(x) + \frac{1}{2}\varphi'^2_x(x, 0)(\sigma(+0) - \sigma(-0))$$

$$b_1(x) = b(x) + \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(x, 0)(\sigma(+0) - \sigma(-0)) + \tag{64}$$

$$+ \varphi'_y(x, 0)\left(\int\limits_{|y|>\alpha} \frac{1+y^2}{y^2} d\sigma(y) + \int\limits_{|y|\leqslant\alpha} y\,d\sigma(y)\right).$$

Здесь $\overline{\sigma}(y)$ обозначает функцию, которая равна $\sigma(y)$ с выделенным скачком в нуле, а α выбирается так, что $1-4\,|\,y\varphi''_{yx}(x, 0)\,| > 0$ для $|\,y\,| \leqslant \alpha$.

Пусть $u_\varepsilon(t, x)$, $v_\varepsilon(t, x)$ и $w_\varepsilon(t, x)$ сохраняют тот смысл, который они имели в лемме 4, то есть являются решениями уравнения (55), в котором функции $a(x)$, $b(x)$ заменены функциями $a_1(x)$, $b_1(x)$ и соответствующих двух других уравнений. Ограниченность производных $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$ дает нам возможность установить равностепенную непрерывность функций u_ε, v_ε и w_ε по t и x. Это позволяет применить теорему Арцела и мы можем, стало быть, выделить из множества функций $u_\varepsilon(t, x)$ последовательность u_{ε_n}, равномерно сходящуюся вместе со своими двумя производными по x к некоторой, дважды по x дифференцируемой функции $u(t, x)$. Покажем, что $u(t, x)$ является решением уравнения (7). Обозначим оператор, стоящий в правой части (62), через L, а оператор, стоящий в правой части (55), через L_ε. Из наших оценок следует, что $L_{\varepsilon_n}u_{\varepsilon_n}$ сходится равномерно по x и $0 \leqslant t \leqslant T$ к Lu. Но раз последовательность производных $\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t}$ сходится равномерно к Lu, то значит $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$, что и заканчивает доказательство существования решения уравнения (7).

Докажем единственность построенного решения. Пусть $u(t, x)$ — какое нибудь решение уравнения (7) с начальным условием (8), обладающее двумя непрерывными производными по x, которые ограничены для всех x и $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $u_\varepsilon(t, x)$ — решение уравнения (63) с той же начальной функцией. Обозначим $u(t, x) - u_\varepsilon(t, x) = \widetilde{u}_\varepsilon(t, x)$ и $(L - L_\varepsilon)u = \psi_\varepsilon(t, x)$. Очевидно, что $\sup\limits_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |\,\psi_\varepsilon(t, x)\,| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Функция $\widetilde{u}_\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon + \psi_\varepsilon(t, x)$, $\widetilde{u}_\varepsilon(0, x) = 0$ может быть представлена в виде:

$$u_\varepsilon(t, x) = \int_0^t T^{(\varepsilon)}_{t-\tau}\psi_\varepsilon(\tau, x)\,d\tau. \tag{65}$$

Из (65) вытекает: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |\,\widetilde{u}_\varepsilon(t, x)\,| = 0$. Это дает возможность заключить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |\,u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)\,| = 0,$$

откуда вытекает единственность решения уравнения (7) с начальным условием (8) в классе функций, ограниченных вместе со своими двумя производными по x равномерно для $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, T]$.

Решение $u(t, x)$ очевидным образом порождает линейный ограниченный оператор T_t: $u(t, x) = T_t f$, такой, что он переводит положительные функции

положительные и $\| T_t \| = 1$. Покажем, что оператор T_t можно предста-
ть в виде (9), где $P(t, x, y)$ при фиксированных x и t представляет собой
которую функцию распределения. Как было показано в лемме 3 $u_\varepsilon(t, x) =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P^\varepsilon(t, x, y)$ и ядро $P^\varepsilon(t, x, y)$ является по y функцией распреде-
ния при фиксированных t и x.

Зафиксируем t и x на время дальнейших рассуждений. Покажем, что
$\int_{|y|>A} dP^\varepsilon(t, x, y)$ равномерно по ε стремится к нулю, когда $A \to \infty$. Положим
$f_\lambda(x) = 1 - \cos \lambda x$, $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Так как сама функция $f_\lambda(x)$ и ее четыре
производные ограничены равномерно по λ, то, как это следует из доказатель-
ства существования решения, $u_\varepsilon(\lambda, t, x)$ сходятся к $u(\lambda, t, x)$ равномерно по
λ. Но $u_\varepsilon(\lambda, t, x)$ — непрерывная функция λ, поэтому $u(\lambda, t, x)$ также непре-
рывна по λ. Очевидно, что $u(0, t, x) = 0$. Далее, для любого δ при доста-
точно малом ε и любом $A > 0$ $\delta + u(\lambda, t, x) \geqslant \int_{|y|>A} (1 - \cos \lambda y)\, d_y P^\varepsilon(t, x, y)$
равномерно по λ.

Усредняя это неравенство по λ для $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{A}$, получим

$$\delta + \frac{A}{2} \int_0^{\frac{2}{A}} u(\lambda, t, x)\, d\lambda \geqslant \int_{|y|>A} \left(1 - \frac{A \sin \frac{2y}{A}}{2y}\right) d_y P^\varepsilon(t, x, y),$$

так как $1 - \frac{A}{2y} \sin \frac{2y}{A} \geqslant \frac{1}{2}$ при $|y| > A$ и при больших A

$$\frac{A}{2} \int_0^{\frac{2}{A}} u(\lambda, t, x)\, d\lambda \leqslant \delta, \quad \text{то} \quad \int_{|y|>A} dP^\varepsilon(t, x, y) \leqslant 4\delta.$$

если $\int_{|y|>A} dP^\varepsilon(t, x, y)$ равномерно по ε стремится к нулю, когда $A \to \infty$,
множество распределений $P^\varepsilon(t, x, y)$ компактно, а в силу того, что $u_\varepsilon(t, x)$
дится к $u(t, x)$, предельное распределение может быть только одно. Таким
разом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f)\, y\, d_y P^\varepsilon(t, x, y) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, d_y P(t, x, y),$$

$P(t, x, y)$ является распределением, как функция y.

Полугрупповое свойство оператора T_t вытекает из того, что коэффициенты
равнении (7) и функции $\varphi(x, y)$, $\sigma(y)$ не зависят от t и из теоремы един-
енности.

Теорема 1, таким образом, доказана.

Доказательство замечания 1 к теореме 1, сформулированного в § 2, следует непосредственно из приведенного выше доказательства теоремы. Что касается замечания 2, то для него доказательство может быть проведено следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$u(t, x) = \int_0^t Nu(\tau, x)\, d\tau + f(x), \qquad (7_2^*)$$

где через N обозначен оператор, стоящий в правой части уравнения (7_2). Решая уравнение (7_2^*) методом последовательных приближений, мы получим соответствующее утверждение относительно существования решения для (7_2). Без труда установим также единственность решения. Прибегнув затем к преобразованиям, аналогичным тем, которые были применены при доказательстве леммы 3, мы получим позитивное свойство оператора T_t, а также тот факт, что $\| T_t \| = 1$. Утверждение относительно ограниченности производных полученного решения, получается рассмотрением продифференцированного по x уравнения (7_2^*), как мы это делали при доказательстве теоремы 1.

Докажем замечание 3. Существование решения уравнения (7_3) следует из замечания 2. Пусть $v(t, x) = \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial x}$. Тогда, если α таково, что $\varphi'_x(x, y) > 0$ для $|y| < \alpha$, то

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \int_{|y| \leqslant \alpha} (v(t, \varphi)\varphi'_x - v(t, x))\, d\sigma(y) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{v(t, \varphi)\varphi'_x - v(t, x)}{y^2}\, d \int_{-\infty}^{y} z^2 d\sigma(z) - \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{v(t, \varphi)\varphi'_x - v(t, x)}{y^2}\, d \int_{y}^{+\infty} z^2 d\sigma(z)$$

и так же как при доказательстве леммы 4 убеждаемся в том, что $|v(t, x)| < c$. Так же как в лемме 4 выясняется ограниченность производных более высокого порядка.

Доказательство теоремы 2. Заметим прежде всего, что решение уравнения (12) существует и единственно по теореме 1. Пусть $u_n(t, x)$ — решение уравнения (10), а $u(t, x)$ — уравнения (12) с одной и той же начальной функцией $f(x)$. Обозначим $u_n(t, x) - u(t, x) = v_n(t, x)$. Тогда $v_n(t, x)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial v_n}{\partial t} = A_n v_n - (A_n - A)u$ (A — это оператор, стоящий в правой части уравнения (12)) и начальному условию $v_n(0, x) = 0$. Для $v_n(t, x)$ имеем:

$$v_n(t, x) = \int_0^t T_{t-\tau}^{(n)}((A_n - A)u(\tau, x))\, d\tau,$$

где $T_t^{(n)}$ — оператор, порождаемый инфинитезимальным оператором A_n. Обратив внимание на ограниченность $T_t^{(n)}$ и производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, мы можем без труда закончить доказательство теоремы. Теорема 2а получается тем же методом.

Поступила в редакцию
3.11.58

ЛИТЕРАТУРА

Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.

С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей (приложение VI), М.— Л., 1946.

W. Feller, Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), Math. Ann. **113** (1936), 113—160 (русск. перев. УМН, вып. 5 (1938), 52—73).

К. В. Маслов и А. Я. Повзнер, Об инфинитезимальных операторах одного класса марковских процессов, Теория вероят. и ее примен., **III**, 1 (1958), 70—83.

K. Ito, On stochastic differential equations, Memoires Amer. Math. Soc., 4, 1951. (русск. перев. Период. сб. переводов иностранных статей «Математика», 1 : 1 (1957), 78—116).

Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероят. и ее примен., I, 1 (1956), 38—60.

И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов (I), Укр. матем. журнал, **2**, 4 (1950), 37—64.

И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов (II), Укр. матем. журнал, **3**, 3 (1951), 317—340.

R. S. Phillips, Perturbation theory for semi-groups of linear operators, Trans. AMS, **74** (1953), 199—222.

А. В. Скороход, Предельные теоремы для процессов Маркова, Теория вероят. и ее примен., **III**, 3 (1958), 217—264.

ON CERTAIN LIMIT THEOREMS IN PROBABILITY THEORY

K. V. MASLOV (KHARKOV)

(*Summary*)

The following problem is considered in the paper. Let

$$\xi_{n,1};\ \xi_{n,2};\ \ldots\ \xi_{n,k_n}\quad (n = 1, 2, \ldots)$$

a sequence of a series of independent random variables, $\varphi(x, y)$ is any function of two riables and the random variables $\zeta_{n,k}$ are determined as

$$\zeta_{n,1} = \xi_{n,1};\ \zeta_{n,k+1} = \varphi(\zeta_{n,k};\ \xi_{n,k+1})\ (k = 1, 2, \ldots\ k_n - 1).$$

We must find sufficient conditions for the existence of a limit distribution of random riable ζ_{n,k_n} $(n \to \infty)$ and the form of this distribution. If $\varphi(x, y) = x + y$ we have the ll-known problems for sums of independent random variables.

Our method of solution of the formulated problems is different from the methods ually employed in analogous studies (e. g. from S. N. Bernstein's methods, which were veloped in [2] for solution to a similar problem).

The theory of partial differential equations and the theory of Markov processes are our ic tools.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

КВАЗИМОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

П. И. КУЗНЕЦОВ, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, В. И. ТИХОНОВ

В работах [1,2] в качестве функций, описывающих случайный процесс, рассматривались две системы функций, взаимно однозначно связанные друг с другом: обобщенные корреляционные функции и моментные функции. Хотя в системах, состоящих из бесконечного числа функций, наиболее важную роль играют младшие функции, тем не менее, мы не имеем оснований принимать во внимание лишь известное число младших функций, положив остальные равными нулю.

Кроме того, записать функции плотности вероятности для многомерных распределений, исходя из заданных корреляционных или моментных функций, затруднительно, хотя характеристические функции этих распределений записываются весьма просто. Между тем иметь аналитическое выражение для плотности вероятности важно при рассмотрении задач, связанных с условной вероятностью и др.

Для устранения этих трудностей в работе [3] была введена в рассмотрение третья система характеризующих функций, которые были названы *квазимоментными функциями*.

Эти функции, как видно из дальнейшего, служат коэффициентами разложения плотности вероятности многомерных распределений в ряд по многомерным полиномам Эрмита (обобщенный ряд Эджворта). Тем самым задача определения погрешности, совершаемой при обрывании последовательности квазимоментных функций, сводится к хорошо изученной проблеме сходимости разложений по ортогональным полиномам и точности представления функции конечным рядом.

Далее, при помощи квазимоментных функций и многомерных полиномов Эрмита можно одинаково легко записать плотность вероятности распределений произвольной кратности, включая континуальное распределение (функционал вероятности, задающий распределение в функциональном пространстве). Это открывает возможности решения ряда важных задач, например, задачи нелинейного экстраполирования, интерполирования и фильтрации негауссовых процессов.

§ 1. Квазимоментные функции

1. Рассмотрим одномерный закон распределения. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $p(\xi)$. Если все моменты величин ξ конечны, то функции $p(\xi)$ можно поставить в соответствие следующий формальный ряд (см. [4,5])

$$p(\xi) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{b_k}{\sigma^k} H_k\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) \right], \tag{1.1}$$

е m, σ — постоянные величины, которые, вообще говоря, можно выбрать оизвольно; $H_k(x)$ — полином Чебышева-Эрмита. Вследствие ортогональности олиномов Чебышева-Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_k(x) H_l(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, k!\, \delta_{kl}$$

оэффициенты b_k, называемые в дальнейшем квазимоментами, выражаются ормулами

$$b_k = \sigma^k \int_{-\infty}^{\infty} p(x) H_k\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx = \sigma^k \mathbf{M} H_k\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right). \tag{1.2}$$

При определенных условиях, накладываемых на $p(\xi)$, ряд (1.1) будет схощимся [4,5] в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - p_n(x)|\, dx = 0, \tag{1.3}$$

де $p_n(x)$ есть сумма первых $n+1$ членов ряда (1.1). При выполнении этого словия, задавшись определенной погрешностью ε аппроксимации функции плотости вероятности $p(\xi)$, можно ограничиться учетом конечного числа первых оэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, будучи уверенными, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - p_n(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Для установления связи между моментами и квазимоментами найдем характеристическую функцию для плотности распределения вероятности (1.1). на равна

$$f(x) = e^{imx + \frac{1}{2}(i\sigma x)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} b_k x^k \right]. \tag{1.4}$$

азлагая экспоненту в ряд Маклорена, выполняя умножение и сравнивая с ядом, составленным из моментов,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} m_k x^k \tag{1.5}$$

ожно убедиться, что моменты линейно выражаются через квазимоменты а следовательно, и обратно), и найти соответствующие коэффициенты.

Быстрота сходимости ряда (1.4) из квазимоментов зависит от выбора m σ. Для большинства практических случаев сходимость максимально быстрая, огда эти величины выбраны равными среднему значению и дисперсии соответственно. В этом случае квазимоменты мы будем называть *собственно вазимоментами* и обозначать их через b_k^*. Нетрудно убедиться, что

$$b_1^* = 0, \qquad b_2^* = 0. \tag{1.6}$$

В случае нормального распределения все собственно квазимоменты равны

нулю. В общем случае b_3^* и b_4^* пропорциональны коэффициентам асимметрии и эксцесса соответственно:

$$\gamma_1 = b_3^* = \sigma^3 \mathbf{M} H_3\left(\frac{\xi - m}{\sigma}\right), \quad \gamma_2 = b_4^* = \sigma^4 \mathbf{M} H_4\left(\frac{\xi - m}{\sigma}\right). \tag{1.7}$$

В тех случаях, когда среднее значение и дисперсия неизвестны и точное вычисление их затруднительно, целесообразно выбирать m, σ^2 равными некоторым приближенным, ориентировочным значениям среднего и дисперсии, при этом, естественно $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

2. Пусть задан стационарный эргодический случайный процесс $\xi(t)$. Рассмотрим двумерное распределение величин $\xi(t)$, $\xi(t+\tau)$. При $\tau = 0$ случайные величины $\xi_1 = \xi(t)$ и $\xi_2 = \xi(t+\tau)$ становятся идентичными. Поэтому двумерная плотность распределения вероятностей при $\tau = 0$ легко записывается через одномерную плотность, о которой говорилось выше. А именно, обрывая ряд на n-ом члене, имеем

$$p_2(\xi_1, \xi_2, 0) = \delta(\xi_1 - \xi_2)\, p_1(\xi_1) = \delta(\xi_1 - \xi_2) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!\,\sigma^k} H_k\left(\frac{\xi - m}{\sigma}\right). \tag{1.8}$$

Характеристическая функция этого распределения имеет вид:

$$f_2(x_1, x_2, 0) = f(x_1 + x_2) = e^{im(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(i\sigma)^2 (x_1+x_2)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} b_k (x_1+x_2)^k. \tag{1.9}$$

Когда $\tau \to \infty$ величины ξ_1, ξ_2 становятся независимыми, и поэтому

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = p_1(\xi_1)\, p_1(\xi_2), \tag{1.10}$$

а соответствующая им характеристическая функция

$$f_2(x_1, x_2, \infty) = f(x_1) f(x_2) = e^{im(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(i\sigma)^2 (x_1^2+x_2^2)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} b_k x_1^k \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} b_k x_2^k. \tag{1.11}$$

Для представления плотности распределения вероятности при промежуточных значениях τ естественно пользоваться многомерными полиномами Чебышева-Эрмита, причем производящую квадратичную форму следует выбрать зависящей от τ таким образом, чтобы при предельных значениях 0 и ∞ получались бы приведенные выше выражения.

Как известно [4,5], многомерные полиномы Чебышева-Эрмита можно определить соотношениями

$$H_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{m_1 + \ldots + m_n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{1.12}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ положительно определенная квадратичная форма. Преобразованием Фурье функции

$$\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_n)} H_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_n), \quad \Delta = \mathrm{Det}\,\|a_{\alpha\beta}\|$$

ляется выражение

$$y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} e^{-\frac{1}{2}\psi(y_1, \dots, y_n)}. \tag{1.13}$$

десь $\psi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} r_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$ — квадратичная форма, присоединенная к орме φ, так что матрица $\| r_{\alpha\beta}' \|$ является обратной $\| a_{\alpha\beta} \|$.

Учитывая эргодичность процесса, положим

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} r(t_\alpha - t_\alpha)\, y_\alpha y_\beta, \tag{1.14}$$

де $r(t)$ — некоторая выбранная функция, такая, что

$$r(t_\alpha - t_\beta) = r(t_\beta - t_\alpha), \quad \lim_{\tau \to \infty} r(\tau) = 0. \tag{1.15}$$

апишем характеристическую функцию f_2 в форме $(t_1 = t,\ t_2 = t + \tau)$

$$f_2(x_1,\ x_2,\ \tau) = \exp\left[im(x_1 + x_2) + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} r(t_\alpha - t_\beta)\, x_\alpha x_\beta \right]. \tag{1.16}$$

$$1 + i \sum_{\alpha=1}^{2} b_1(t_\alpha) x_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b_2(t_\alpha,\ t_\beta)\, x_\alpha x_\beta + \frac{i^3}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{2} b_3(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma)\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \dots \Big];$$

ри $\tau = 0$ это выражение переходит в (1.9), если

$$r(0) = \sigma^2, \quad b_1(t) = b_1,\ b_2(t, t) = b_2,\ b_3(t, t, t) = b_3, \dots$$

если берется лишь $n + 1$ членов.

При $\tau \to \infty$ (1.16) совпадает с (1.11) вследствие (1.15), если функции b_1, , $b_3, \dots$ подобраны соответствующим образом (см. ниже). Однако для это- в (1.16) должны присутствовать $2n + 1$ членов вплоть до b_{2n}.

Из соображений единообразия представляется целесообразно отбросить в ражении (1.16) все члены порядков, больших чем n. Тем самым будет до- щено некоторое уменьшение точности многомерных распределений, тем бо- е незначительное, чем больше n. Вместе с тем в некоторой степени нару- ается принцип исчезновения всякой коррелированности при беспредельном еличении интервала τ между рассматриваемыми моментами времени. Однако а «остаточная коррелированность» тем незначительнее, чем больше n.

3. Распространяя идеи, проиллюстрированные для двумерного распределе- я, на распределения произвольной кратности и произвольного случайного оцесса, можно прийти к выводу, что характеристическую функцию много- рного распределения величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, с некоторым приближением жно записать в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n;\ \ t_1, \dots, t_n) = \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^{n} s(t_\alpha)\, x_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} r(t_\alpha, t_\beta) x_\alpha x_\beta \right].$$

$$1 + i \sum_{\alpha=1}^{n} b_1(t_\alpha)\, x_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} b_2(t_\alpha,\ t_\beta)\, x_\alpha x_\beta + \frac{i^3}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} b_3(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma)\, x_\alpha x_\beta x_\gamma + \dots \Big] \tag{1.17}$$

Учитывая симметрию квазимоментных функций и приведя подобные члены, можем записать

$$f(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^{n} s(t_\alpha)\, x_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} r(t_\alpha,\ t_\beta)\, x_\alpha x_\beta \right] \cdot \tag{1.18}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1+\ldots+m_n=k} \frac{i^k}{m_1! \ldots m_n!}\, b_k\left(t_1^{(m_1)}, \ldots, t_n^{(m_n)}\right) x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Фигурирующие здесь функции $b_k\left(t_1^{(m_1)}, \ldots, t_k^{(m_k)}\right)$ мы будем называть *квазимоментными функциями*, а функции $s(t)$, $r(t_1, t_2)$ — *образующими функциями* для данных квазимоментных функций.

Имея запись характеристической функции в форме (1.17), нетрудно перейти к соответствующей плотности распределения вероятностей. Выражение (1.17) дает разложение плотности распределения вероятности по функциям (1.13), выражающимся через многомерные полиномы Чебышева-Эрмита. Удобнее всего применить следующую форму записи. Будем писать квазимоментную функцию $b_k(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k}) = b_k(\overbrace{t_1, \ldots, t_1}^{m_1 \text{ раз}}, \overbrace{t_2, \ldots, t_2}^{m_2 \text{ раз}}, \ldots, \overbrace{t_l, \ldots t_l}^{m_l \text{ раз}})$ в числе аргументов которой t_1 присутствует m_1 раз, t_2 — m_2 раз и т. д. в виде

$$b_k\left(t_1^{(m_1)}, \ldots, t_l^{(m_l)}\right); \qquad \sum_{i=1}^{l} m_i = k. \tag{1.19}$$

Плотность распределения вероятностей для величин $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2), \ldots, \ldots, \xi_l = \xi(t_l)$, соответствующую характеристической функции (1.17), тогда можно записать следующим образом:

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \frac{\frac{1}{\Delta^2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} a_{\alpha\beta}(\xi_\alpha - s_\alpha)(\xi_\beta - s_\beta)} \cdot \tag{1.20}$$

$$\cdot \sum_{k} \sum_{m_1+\ldots+m_n=k} \frac{1}{m_1! \ldots m_n!}\, H_{(m_1 \ldots m_n)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n)\, b_k\left(t_1^{(m_1)}, \ldots, t_n^{(m_n)}\right),$$

где

$$s_\alpha = s(t_\alpha), \quad \Delta = \mathrm{Det}\,\|a_{\alpha\beta}\|$$

$\|a_{\alpha\beta}\|$ — матрица, обратная матрице $\|r(t_\alpha,\ t_\beta)\|$. Итак, зная квазимоментные функции, можно без особого труда найти соответствующее аналитическое выражение для плотности вероятности любого многомерного распределения.

4. Решим теперь задачу, как найти квазимоментные функции, исходя из заданной плотности распределения вероятности $p(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Для этой цели привлечем вторую группу многомерных полиномов Чебышева-Эрмита, соответствующих той же положительно определенной квадратичной форме $\sum_{\alpha,\,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, которые можно определить следующим образом

$$G_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (-1)^{m_1+\ldots+m_n} e^{\frac{1}{2}\psi(y_1, \ldots, y_n)} \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}}{\partial y_1^{m_1} \ldots \partial y_n^{m_n}} e^{-\frac{1}{2}\psi(y_1, \ldots, y_n)}, \tag{1.21}$$

$$y_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta,$$

$y_1, \ldots, y_n) = \Sigma r_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$—квадратичная форма, сопряженная форме $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Можно показать [6,7], что полиномы (1.12) и (1.21) являются ортогональными:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta} H_{(\nu_1 \ldots \nu_n)}(x_1, \ldots, x_n)\, G_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} m_1! \ldots m_n!\, \delta_{\nu_1 m_1} \ldots \delta_{\nu_n m_n}. \qquad (1.22)$$

Умножим $p(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ на $G_{(m_1 \ldots m_n)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n)$ и проинтегрируем бесконечных пределах. Вследствие (1.20) и (1.22) будем иметь

$$b_k(t_1^{(m_1)}, \ldots, t_n^{(m_n)}) = \int \ldots \int p(\xi_1, \ldots, \xi_n;\ t_1, \ldots, t_n) \cdot \qquad (1.23)$$

$$\cdot G_{(m_1 \ldots m_n)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = \mathbf{M} G_{(m_1 \ldots m_n)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n).$$

Образующие функции $s(t)$, $r(t_1, t_2)$ целесообразно выбирать равными корреляционным функциям $k_1(t)$, $k_2(t_1, t_2)$ соответственно (в этом случае собственно квазимоментные функции $b_1(t)$, $b_2(t_1, t_2)$ равны нулю) или хотя бы близкими к ним. Желательно, чтобы образующие функции отвечали особенностям процесса: в случае стационарного случайного процесса функция $s(t)$ должна быть постоянной, а $r(t_1, t_2)$ должна зависеть лишь от разности времен; в случае эргодического процесса $r(t_1, t_2)$ должна исчезать при $|t_1 - t_2| \to \infty$; время корреляции функции $r(t_1, t_2)$ должно приблизительно совпадать времени корреляции процесса. Если это не так, то всегда возможно произвести пересчет квазимоментных функций к новым образующим функциям.

5. Укажем, как выражаются квазимоментные функции через корреляционные функции. Применяя методику, использованную в [2] при выводе формулы, выражающей моментные функции через корреляционные, получим, что квазимоментные функции выразятся аналогичным же образом, только вместо $s(t)$, $k_2(t_1, t_2)$ будут фигурировать соответственно $k_1(t) - s(t)$ и $k_2(t_1, t_2) - r(t_1, t_2)$, т. е.

$$b_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + p\lambda_p = n} \sum^{*} (k_1 - s)^{(\lambda_1)} (k_2 - r)^{(\lambda_2)} k_3^{(\lambda_3)} \ldots k_p^{(\lambda_p)} \qquad (1.24)$$

Здесь Σ^* означает суммирование по всевозможным перестановкам аргументов, дающим результаты, не совпадающие тождественно. Число членов этой суммы равно $n!/\lambda_1!\lambda_2!(2!)^{\lambda_2} \ldots \lambda_p!(p!)^{\lambda_p}$.

Если для приближенного описания случайного процесса мы ограничиваемся рассмотрением n первых квазимоментных функций $b_1, b_2, \ldots, b_n(t_1, \ldots, t_n)$, считая остальные равными нулю, то по сути дела мы принимаем во внимание $k_1, k_2, \ldots, k_n$, пренебрегая сведениями, заключающимися в высших корреляционных функциях $k_{n+1}, k_{n+2}, \ldots$, заменяя последние некоторыми функциями, выражающимися через s, r, k_1, $k_2, \ldots, k_n$.

В общем случае эти функции, учитывающие k_{n+1}, $k_{n+2}, \ldots$ не обладают свойством стремления к нулю при возрастании (по абсолютной величине) хотя бы одной разности своих аргументов. Этим объясняется частичная потеря эргодичности при указанной операции, если эргодичность и была ранее.

6. Результаты, изложенные выше для одного случайного процесса $\xi(t)$, можно обобщить на несколько случайных процессов. Рассмотрим в качестве примера две случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$. К числу образующих функций $s(t)$, $r(t_1, t_2)$ и $s'(t)$, $r''(t_1, t_2)$ следует добавить смешанную образующую функцию $r'(t_1, t_2)$. Статистическую связь случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут характеризовать смешанные квазимоментные функции

$$b_{(p)\xi,\,(q)\eta}(t_1, \ldots, t_p;\ t'_1, \ldots, t'_q);\ p,\ q = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

Характеристическая функция многомерного распределения величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_p), \eta(t'_1), \ldots, \eta(t'_q)$ записывается через квазимоментные функции следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_p;\ y_1, \ldots, y_q;\ t_1, \ldots, t_p;\ t'_1, \ldots, t'_q) =$$

$$= \exp\left[i \sum_1^p s(t_\alpha)\, x_\alpha + i \sum_1^q s'(t'_\alpha)\, y_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_1^p r(t_\alpha,\ t_\beta)\, x_\alpha x_\beta + \right.$$

$$\left. + i^2 \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{p,\,q} r'(t_\alpha,\ t'_\beta)\, x_\alpha y_\beta + \frac{i^2}{2} \sum_1^q r''(t'_\alpha,\ t'_\beta)\, y_\alpha y_\beta \right] \times$$

$$\times \sum_{u,\,v} \frac{i^{u+v}}{u!\,v!} \sum_{\alpha,\,\beta} b_{(u)\,\xi,\,(v)\,\eta}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_u},\ t'_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_v}) x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_u} y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_v}. \qquad (1.25)$$

Этой характеристической функции соответствует плотность распределения вероятностей

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q; t_1, \ldots, t_p, t'_1, \ldots, t'_q) = \frac{(\det A)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}(\zeta_\alpha - s_\alpha)(\zeta_\beta - s_\beta)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{u,\,v} \sum_{\substack{\sum \mu_i = u \\ \sum \nu_i = v}} \frac{1}{\mu_1! \ldots \mu_p!\ \nu_1! \ldots \nu_q!} H_{(\mu_1 \ldots \mu_p,\ \nu_1 \ldots \nu_q)}(\zeta_1 - s_1, \ldots, \zeta_{p+q} - s_{p+q}) \times$$

$$\times b_{(u)\,\xi,\,(v)\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)} \cdot t_1'^{(\nu_1)}, \ldots, t_q'^{(\nu_q)}),$$

где

$$A = \| a_{\sigma\rho} \| = \begin{pmatrix} \| r(t_\alpha,\ t_\beta) \| & \| r'(t_\alpha,\ t'_\gamma) \| \\ \| r'(t'_\gamma,\ t_\beta) \| & \| r''(t'_\gamma,\ t'_\delta) \| \end{pmatrix}^{-1} \begin{matrix} \sigma,\ \rho = 1, \ldots, p+q \\ \alpha,\ \beta = 1, \ldots, p \\ \gamma,\ \delta = 1, \ldots, q \end{matrix} \qquad (1.26)$$

$$\zeta_\alpha = \begin{cases} \xi_\alpha, & \alpha \leqslant p \\ \eta_{\alpha-p}, & \alpha > p \end{cases} \qquad s_\alpha = \begin{cases} s_\alpha, & \alpha \leqslant p \\ s'_{\alpha-p}, & \alpha > p \end{cases}.$$

Выражение (1.26) дает возможность, пользуясь ортогональностью многомерных полиномов Чебышева-Эрмита, определять квазимоментные функции по формуле

$$b_{(u)\,\xi,\,(v)\,\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)};\ t_1'^{(\nu_1)}, \ldots, t_q'^{(\nu_q)}) =$$

$$= \mathbf{M} G_{(\mu_1 \ldots \mu_p,\ \nu_1 \ldots \nu_q)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \eta_{1q} - s'_q) =$$

$$= \int \ldots \int p(\xi_1, \ldots, \xi_p,\ \eta_{11}, \ldots, \eta_{1q}) G_{(\mu_1 \ldots \mu_p,\ \nu_1 \ldots \nu_q)}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_p - s_p;$$

$$\eta_{11} - s'_1, \ldots, \eta_{1q} - s'_q) \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_p d\eta_1 \ldots d\eta_q. \qquad (1.27)$$

выражениях (1.26), (1.27) полиномы Чебышева-Эрмита $H_{(\mu_1\ldots\nu_q)}$, $G_{(\mu_1\ldots\nu_q)}$ даются матрицей A.

7. Отметим, что при линейных преобразованиях случайных функций квазимоментные функции преобразуются весьма просто, а именно, *квазимоментные функции преобразуются по тем же правилам, что корреляционные и моментные функции, если образующие их функции также преобразуются по этим же правилам.*

Так, например, если $\eta(t) = \int \mathfrak{G}(t, t')\,\xi(t')\,dt'$ и $s_\eta(t) = \int \mathfrak{G}(t, t')\,s_\xi(t')\,dt'$,

$$r_\eta(t_1, t_2) = \int\int \mathfrak{G}(t_1, t_1')\,\mathfrak{G}(t_2, t_2')\,r_\xi(t_1', t_2')\,dt_1'dt_2', \tag{1.28}$$

$$b_{(k)\eta}(t_1, \ldots, t_k) = \int\ldots\int \mathfrak{G}(t_1, t_1')\ldots\mathfrak{G}(t_k, t_k')\,b_{(k)\xi}(t_1', \ldots, t_k')\,dt_1'\ldots dt_k'.$$

8. В некоторых случаях оказывается более удобным другой способ обозначения многомерных полиномов Эрмита и другой способ записи основных формул.

Наряду с (1.12) многомерные полиномы Эрмита можем определить равенствами

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k e^{\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)} \frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_m}} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)} \tag{1.29}$$

Сравнивая (1.29) с (1.12), нетрудно найти связь между полиномами (1.12) $H_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ и $H_{(m_1\ldots m_n)}$. Пусть среди индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ индекс 1 встречается m_1 раз, индекс 2 встречается m_2 раза, и т. д., наконец, индекс n встречается m_n раз. Тогда

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_1, \ldots, x_n) = H_{(m_1\ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_m). \tag{1.30}$$

Здесь, так же как и в (1.19), индексы в скобках указывают повторяемость соответствующих индексов (аргументов). Аналогичным образом можно ввести новый способ записи полиномов второго рода:

$$G_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = G_{(m_1\ldots m_n)}.$$

Переходя к форме записи, не содержащей индексов повторяемости, разложение плотности вероятности в ряд (1.20) можно записать

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta} \cdot \tag{1.31}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, b_k(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k})\, H_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_\alpha = \xi_\alpha - s(t_\alpha)$.

9. Исследуем более подробно вид многомерных полиномов Эрмита.

Производя дифференцирование экспоненты в соответствии с формулами (1.12), (1.29), получим выражение, зависящее от производных

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_\alpha} \text{ и } \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Первая из них есть линейная комбинация от $x_1,\ldots,x_n$, которую обозначим через y_α:

$$y_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\beta. \tag{1.32}$$

Вторая равна постоянной $a_{\alpha\beta}$. Удобно ввести обозначение

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(y_{\alpha_1},\ldots,y_{\alpha_k}) = (-1)^k e^{\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}\frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_k}} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{1.33}$$

Нетрудно видеть, что введенные полиномы не зависят от других аргументов из числа аргументов $y_1,\ldots,y_n$, кроме как от $y_{\alpha_1},\ldots,y_{\alpha_k}$. Производя дифференцирование согласно (1.33), получаем

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_i}(y_1) = y_{\alpha_i},\ \mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\alpha_2}(y_{\alpha_i},y_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1}y_{\alpha_2} - a_{\alpha_1\alpha_2},\ \mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(y_{\alpha_1},y_{\alpha_2},y_{\alpha_3}) =$$

$$= y_{\alpha_1}y_{\alpha_2}y_{\alpha_3} - y_{\alpha_1}a_{\alpha_2\alpha_3} - y_{\alpha_2}a_{\alpha_1\alpha_3} - y_{\alpha_3}a_{\alpha_1\alpha_2}. \tag{1.34}$$

Вообще

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(y_{\alpha_1},\ldots,y_{\alpha_k}) = \sum_{m=0}^{m\leqslant\frac{1}{2}k} (-1)^m \sum{}' a_{\beta_1\beta_{m+1}}\ldots a_{\beta_m\beta_{2m}}y_{\beta_{2m+1}}\ldots y_{\beta_k}. \tag{1.35}$$

Здесь символом Σ' обозначена специфическая сумма, в каждом члене которой система индексов $\beta_1,\ldots,\beta_k$, является перестановкой системы $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, причем сумма распространяется лишь на те перестановки, которые дают несовпадающие результаты. Вследствие симметрии $a_{\alpha\beta}$ относительно перестановки α и β и вследствие коммутативности произведения число несовпадающих членов суммы Σ' равно $k!\,|\,2^m m!\,(k-2m)!$

Из полученных формул видно, что выполняются следующие тождества

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(y_{\alpha_1},\ldots,y_{\alpha_k}) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k=1} a_{\alpha_1\beta_1}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}\mathcal{H}^{(A^{-1})}_{\beta_1\ldots\beta_n}(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_n}), \tag{1.36}$$

$$\left(y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\beta\right),$$

которые полезны иногда для преобразования и упрощения выражений.

При помощи полиномов $\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ можно записать произвольные полиномы Эрмита. Так, сравнивая (1.29) с (1.33), получаем

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_1,\ldots,x_n) = \mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\left(\sum_{\beta_1=1}^{n} a_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1},\ldots,\sum_{\beta_k=1}^{n} a_{\alpha_k\beta_k}x_{\beta_k}\right) = \tag{1.37}$$

$$= \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_k=1}^{n} a_{\alpha_1\beta_1}\ldots a_{\alpha_k\beta_k}\mathcal{H}^{(A^{-1})}_{\beta_1\ldots\beta_k}(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_k}),$$

Если ввести индексы повторяемости m_α, $(\alpha = 1, \ldots, n)$, указывающие, сколько раз повторяется индекс α в совокупности индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, то из (1.37) получим формулу для полиномов (1.12):

$$H_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{H}^{(A)}_{(m_1 \ldots m_n)}\left(\left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta}x_\beta\right)^{(m_1)}, \ldots, \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{n\beta}x_\beta\right)^{(m_n)}\right). \quad (1.38)$$

Здесь, как и ранее, индекс в скобках обозначает повторяемость аргументов.

Обращаясь к формуле (1.21), замечаем, что она отличается от (1.33) заменой x_α на y_α и обратно. Квадратичная форма $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ порождается матрицей A^{-1}, обратной матрице A, квадратичной формы $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$. Поэтому

$$G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{H}^{(A^{-1})}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k}) \quad (1.39)$$

$$G_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{H}^{(A^{-1})}_{(m_1 \ldots m_n)}(x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n^{(m_n)}).$$

Одномерные полиномы Эрмита связаны с $H^{(A)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ соотношениями

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha \ldots \alpha}(y_\alpha, \ldots, y_\alpha) = \mathcal{H}^{(A)}_{(0 \ldots 0\ k 0 \ldots 0)}(y_\alpha^{(k)}) = a_{\alpha\alpha}^{\frac{k}{2}} H_k\left(\frac{y_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}\right) \quad (1.40)$$

$$H_k(y) = \mathcal{H}^{(1)}_{(k)}(y^{(k)}).$$

10. Используем приведенные выше соотношения для того, чтобы записать многомерные распределения через полиномы $\mathcal{H}$.

В силу (1.37) формула (1.31) записывается в виде

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum[\xi_\alpha - s(t_\alpha)]y_\beta} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n=1}^{n} b_k(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k}) \mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_n}), \quad (1.41)$$

где $A = \| a_{\alpha\beta} \| = \| r(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}$, $y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}[\xi_\beta - s(t_\beta)]$, или,

вследствие (1.36), $(x_\alpha = \xi_\alpha - s(t_\alpha),\ R = \| r(t_\alpha, t_\beta) \|)$:

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k=1}^{n} \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_k=1}^{n} b_k(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k}) a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_k\beta_k} \mathcal{H}^{(R)}_{\beta_1 \ldots \beta_k}(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_k}). \quad (1.42)$$

Последняя формула выгодно отличается от (1.20) тем, что число аргументов функций b_k и $\mathcal{H}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ не изменяется (остается равным k) при увеличении числа n выбранных моментов времени. В такой же форме можно записать

совместную плотность распределения для нескольких случайных процессов (см. пункт 6). Выражение (1.26) для плотности распределения случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_p)$, $\eta(t'_1), \ldots, \eta(t'_q)$ принимает вид:

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_p;\ \eta_1, \ldots, \eta_q;\ t_1, \ldots, t_p;\ t'_1, \ldots, t'_q) = (2\pi)^{-\frac{p+q}{2}} (\operatorname{Det} A)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} [\xi_\alpha - s(t_\alpha)]\, y_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{q} (\eta_\gamma - s'_\gamma)\, z_\gamma \right\} \cdot \qquad (1.43)$$

$$\cdot \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k=1}^{p} \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_l=1}^{q} b_{(k)\xi,\ (l)\eta}(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_k};\ t'_{\gamma_1}, \ldots, t'_{\gamma_l}) \cdot$$

$$\cdot \mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \gamma_1 \ldots \gamma_l}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_k}, z_{\gamma_1}, \ldots, z_{\gamma_l}),$$

где

$$y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} [\xi_\beta - s(t_\beta)] + \sum_{\gamma=1}^{q} a_{\alpha,\ p+q} [\eta_\gamma - s'(t_\gamma)],$$

$$z_\gamma = \sum_{\beta=1}^{p} a_{p+\gamma,\ \beta} [\xi_\beta - s(t_\beta)] + \sum_{\delta=1}^{q} a_{p+\gamma,\ p+\delta} [\eta_\delta - s'(t_\delta)],$$

$$A = \| a_{\sigma\rho} \| = \begin{pmatrix} \| r(t_\alpha,\ t_\beta) \| & \| r'(t_\alpha,\ t'_\delta) \| \\ \| r'(t_\gamma,\ t_\beta) \| & \| r''(t'_\gamma,\ t'_\delta) \| \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(\sigma, \rho = 1, \ldots, p+q;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, p;\ \gamma, \delta = 1, \ldots, q).$$

11. В заключение укажем, как формулы (1.41), (1.42) можно обобщить на континуальный случай. Пусть число точек $t_0, t_1, \ldots, t_N = T$, производящих разбиение интервала $[t_0, T]$ беспредельно увеличивается, так что расстояние $t_j - t_{j-1} = \Delta_j$ между любыми двумя точками стремится к нулю. Рассмотрим, к каким выражениям будет стремиться при этом формулы (1.41), (1.42). Можно записать

$$\xi(t_\beta) - s(t_\beta) = \sum_{\alpha} r(t_\alpha,\ t_\beta)\, y_\alpha. \qquad (1.44)$$

Положим

$$y_\alpha = y(t_\alpha)\, \Delta_\alpha. \qquad (1.45)$$

Тогда в пределе $\Delta_\alpha \to 0$ равенство (1.44) перейдет в интегральное уравнение

$$\xi(t) - s(t) = \int_{t_0}^{T} r(t,\ t')\, y(t')\, dt', \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (1.46)$$

Его решение можно записать

$$y(t) = \int_{t_0}^{T} g(t,\ t')\, [\xi(t') - s(t')]\, dt', \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (1.47)$$

где $g(t, t')$ функция влияния, являющаяся решением уравнения

$$\int_{t_0}^{T} r(t, t') g(t', t'') dt = \delta(t' - t''), \quad t_0 \leqslant t', t'' \leqslant T, \tag{1.48}$$

т. е.

$$g = \| g(t, t') \| = \| r(t, t') \|^{-1}.$$

Для конечного разбиения $t_0, t_1, \ldots, t_N$ равенству (1.47) соответствует соотношение

$$y(t_\alpha) \approx \sum g(t_\alpha, t_\beta) [\xi_\beta - s(t_\beta)] \Delta_\beta. \tag{1.49}$$

Учитывая (1.45) и сопоставляя с (1.32) получаем отсюда

$$a_{\alpha\beta} \approx g(t_\alpha, t_\beta) \Delta_\alpha \Delta_\beta. \tag{1.50}$$

Найденных соотношений (1.44) и (1.50) достаточно, чтобы найти предельную континуальную форму для выражения (1.41). В самом деле, учитывая (1.35), (1.36), имеем вследствие (1.45), (1.50):

$$\mathcal{H}^{(A)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_k}) = \Delta_{\alpha_1} \ldots \Delta_{\alpha_k} \mathcal{H}^{(g)}{}_{t_{\alpha_1} \ldots t_{\alpha k}}(y(t_{\alpha_1}), \ldots y(t_{\alpha_k})).$$

При $\Delta_\alpha \to 0$ сумма в (1.41), очевидно, переходит в интегральное выражение

$$P[\xi(t)] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [\xi(t) - s(t)] y(t) dt \right\} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{T} \ldots \int_{t_0}^{T} b_k(t_1, \ldots, t_k) \mathcal{H}^{(g)}_{t_1 \ldots t_k}(y(t_1), \ldots, y(t_k)) dt_1 \ldots dt_k, \tag{1.51}$$

где

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, t') [\xi(t') - s(t')] dt' \quad g = \| g(t, t') \| = R^{-1} = \| r(t, t') \|^{-1}$$

или

$$P[\xi(t)] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [\xi(t) - s(t)] y(t) dt \right\} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{T} \ldots \int_{t_0}^{T} b_k(t_1, \ldots, t_k) g(t_1 - \tau_1) \ldots g(t_k - \tau_k) \cdot \tag{1.52}$$

$$\cdot \mathcal{H}^{(R)}_{\tau_1 \ldots \tau_k}(\xi(\tau_1) - s(\tau_1), \ldots, \xi(\tau_k) - s(\tau_k)) dt_1 \ldots dt_k d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

(Нормировочная постоянная, теряющая смысл при $N \to \infty$ нами опущена).

Аналогичным же способом из (1.42) может быть получено выражение для функционала вероятности, описывающего совместное распределение случайной функции $\xi(t)$ на интервале (t_0, T) и функции $\eta(t)$ на интервале (t_0', T).

§ 2. Преобразование квазимоментных функций нелинейными системами

1. а) Рассмотрим сначала простейший вид нелинейного преобразования. Пусть требуется найти квазимоментные функции процесса

$$\eta(t) = f(\xi(t)), \tag{2.1}$$

где $f(x)$ — некоторая (интегрируемая) функция, а $\xi(t)$ — известный случайный процесс, заданный своими квазимоментными функциями $b_1(t)$, $b_2(t_1, t_2), \ldots$.

Величины, относящиеся к случайной функции $\eta(t)$ в отличие от соответствующих величин для функции $\xi(t)$, будем отмечать волной сверху.

Пусть квазимоментные функции для $\eta(t)$ определяются образующими функциями $\tilde{s}(t)$ и $\tilde{r}(t_1, t_2)$.

Рассмотрим одномерный закон распределения $\tilde{p}(\eta)$. Согласно формуле (1.2), имеем ($\tilde{\sigma}^2 = \tilde{r}$, $\sigma^2 = r$):

$$\tilde{b}_k = (\tilde{\sigma})^k \int \tilde{p}(\eta) H_k\left(\frac{\eta - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) d\eta = (\tilde{\sigma})^k \mathbf{M} H_k\left(\frac{\eta - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) =$$

$$= (\tilde{\sigma})^k \mathbf{M}\left(\frac{f(\xi) - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) = (\tilde{\sigma})^k \int p(\xi) H_k\left(\frac{f(\xi) - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) d\xi. \qquad (2.2)$$

Подставляя сюда (1.1), получаем

$$\tilde{b}_k = (\tilde{\sigma})^k \sum_m \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{m!} \frac{b_m}{\sigma^m} \int e^{-\frac{(\xi - s)^2}{2\sigma^2}} H_m\left(\frac{\xi - s}{\sigma}\right) H_k\left(\frac{f(\xi) - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) d\xi. \qquad (2.3)$$

Таким образом, при нелинейном преобразовании (2.1) квазимоменты преобразуются линейно:

$$\tilde{b}_k = \sum_m \gamma_{km} b_m,$$

где

$$\gamma_{km} = \frac{\tilde{\sigma}^k}{\sigma^{m+1}} \frac{1}{m! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} H_m\left(\frac{x}{\sigma}\right) H_k\left(\frac{f(x+s) - \tilde{s}}{\tilde{\sigma}}\right) dx,$$

б) Рассматривая многомерные распределения, находим закон преобразования квазимоментных функций. Полиномы Чебышева-Эрмита, соответствующие матрице $\| \tilde{a}_{\alpha\beta} \| = \| \tilde{r}(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}$, будем отмечать волной сверху. Используя (1.23), находим

$$\tilde{b}_k(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_n^{(\nu_n)}) = \mathbf{M} \tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(\eta_1 - \tilde{s}_1, \ldots, \eta_n - \tilde{s}_n) =$$

$$= \int \ldots \int p(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) \tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f(\xi_1) - \tilde{s}_1, \ldots, f(\xi_n) - \tilde{s}_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (2.4)$$

Подставляя выражение (1.20) в (2.4), имеем

$$\tilde{b}_k(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_n^{(\nu_n)}) = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum \frac{1}{\mu_1! \ldots \mu_n!} b_m(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}) \cdot$$

$$\cdot \int \ldots \int e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n a_{\alpha\beta}(\xi_\alpha - s_\alpha)(\xi_\beta - s_\beta)} H_{\mu_1 \ldots \mu_n}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n) \times$$

$$\times \tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f(\xi_1) - \tilde{s}_1, \ldots, f(\xi_n) - \tilde{s}_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Видим, что нелинейному преобразованию (2.1) соответствует линейное преобразование квазимоментных функций:

$$\tilde{b}_k(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_n^{(\nu_n)}) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_n \mu_1 \ldots \mu_n} b_m(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}), \qquad (2.5)$$

где

$$\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_n \mu_1 \ldots \mu_n} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\mu_1! \ldots \mu_n!} \cdot \int \ldots \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta} H_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f(x_1 + s_1) - \tilde{s}_1, \ldots, f(x_n + s_n) - \tilde{s}_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

в) Найдем теперь смешанные квазимоментные функции двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

К образующим функциям $s(t)$, $r(t_1, t_2)$, задающим квазимоментные функции процесса $\xi(t)$, и функциям $\widetilde{s}(t)$, $\widetilde{r}(t_1, t_2)$, образующим квазимоментные функции процесса $\eta(t)$, добавим смешанную функцию $\rho(t_1, t_2)$. Согласно (1.27), имеем

$$b_{(u)\xi,(v)\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)}, t_1'^{(\nu_1)}, \ldots, t_q'^{(\nu_q)}) =$$

$$= \mathbf{M}\widetilde{G}_{\mu_1 \ldots \mu_p, \nu_1 \ldots \nu_q}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_p - s_p, \quad f(\tilde{\xi}_1) - \widetilde{s}_1, \ldots, f(\tilde{\xi}_q) - \widetilde{s}_q) =$$

$$= \int \cdots \int p(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}, \quad t_1, \ldots, t_p, \quad t_1', \ldots, t_q',$$

$$\widetilde{G}_{\mu_1 \ldots \mu_p, \nu_1 \ldots \nu_q}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_p - s_p, \quad f(\tilde{\xi}_1) - \widetilde{s}_1, \ldots, f(\tilde{\xi}_q) - \widetilde{s}_q)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{p+q},$$

$$\xi_i = \begin{cases} \xi(t_i) & i \leqslant p \\ \xi(t'_{i-p}) & i > p, \end{cases}$$

где $\widetilde{G}_{\mu_1 \ldots \mu_p, \nu_1 \ldots \nu_q}$ — многомерный полином Чебышева-Эрмита, соответствующий производящей матрице

$$\| \widetilde{a}_{\alpha\beta} \| = \begin{pmatrix} \| r(t_i, t_j) \| & \| \rho(t_i, t'_m) \| \\ \| \rho(t_m, t_j) \| & \| \widetilde{r}(t'_m, t'_n) \| \end{pmatrix}^{-1}, \quad \begin{matrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, p+q \\ i, j = 1, \ldots, p \\ m, n = 1, \ldots, q. \end{matrix}$$

Представляя $p(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}; t_1, \ldots, t_{p+q})$ в форме (1.20), получим

$$b_{(u)\xi,(v)\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)}, t_{p+1}^{(\nu_1)}, \ldots, t_{p+q}^{(\nu_q)}) =$$

$$= \sum \gamma_{\mu_1 \ldots \nu_q, \sigma_1 \ldots \sigma_{p+q}} b_{(w)\xi}(t_1^{(\sigma_1)}, \ldots, t_{p+q}^{(\sigma_{p+q})}), \qquad (2.6)$$

где $u = \sum_1^p \mu_i$, $v = \sum_1^q \nu_i$, $w = \sum_1^{p+q} \sigma_i$,

$$\gamma_{\mu_1 \ldots \mu_p, \nu_1 \ldots \nu_q \sigma_1 \ldots \sigma_{p+q}} = \frac{(\operatorname{Det} A)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}} \frac{1}{\sigma_1! \ldots \sigma_{p+q}!} \cdot$$

$$\cdot \int \cdots \int e^{-\frac{1}{2}\sum_1^{p+q} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta} H^{(A)}_{\sigma_1 \ldots \sigma_{p+q}}(x_1, \ldots, x_{p+q}) \times$$

$$\times \widetilde{G}_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q}(x_1, \ldots, x_p, f(x_{p+1} + s_{p+1}) - \widetilde{s}_1, \ldots) dx_1 \ldots dx_{p+q};$$

$$A = \| a_{\alpha\beta} \| = \| r(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, p+q.$$

2. Пусть теперь неизвестная случайная функция нелинейно зависит от двух случайных процессов:

$$\eta(t) = f(\xi(t), \zeta(t)), \qquad (2.7)$$

где $f(x, y)$ — известная функция.

Считаем, что случайные функции заданы квазимоментными функциями (при образующих функциях $s_\xi(t)$, $s_\zeta(t)$, $r_\xi(t_1, t_2)$, $r_\zeta(t_1, t_2)$, $r_{\xi\zeta}(t_1, t_2)$. Найдем квазимоментные функции процессов $\eta(t)$ для образующих функций $\tilde{s}(t)$, $\tilde{r}(t_1, t_2)$. Применяя тот же метод, что и ранее, находим

$$b_{(v)\eta}(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_q^{(\nu_q)}) = \mathbf{M}\tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_q}(f(\xi_1\zeta_1) - \tilde{s}_1, \ldots, f(\xi_q\zeta_q) - \tilde{s}_q) =$$

$$= \sum \gamma_{\nu_1 \ldots \nu_q \pi_1 \ldots \pi_q \sigma_1 \ldots \sigma_q} b_{(g)\xi, (h)\zeta}(t_1^{(\pi_1)}, \ldots, t_q^{(\pi_q)}, t_1^{(\sigma_1)}, \ldots, t_q^{(\sigma_q)}). \qquad (2.8)$$

Здесь

$$\gamma_{\nu_1 \ldots \nu_q \pi_1 \ldots \pi_q \sigma_1 \ldots \sigma_q} = \frac{(\operatorname{Det} A)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^q} \frac{1}{\pi_1'! \ldots \pi_q'! \sigma_1'! \ldots \sigma_q'!} \cdot$$

$$\cdot \int \cdots \int e^{-\frac{1}{2}\sum_1^{2q} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta} H_{\pi_1 \ldots \pi_q \sigma_1 \ldots \sigma_q}(x_1, \ldots, x_{2q}) \times$$

$$\times \tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_q}(f(x_1 + s_{\xi 1}, x_{q+1} + s_{\zeta 1}) - \tilde{s}_1, \ldots) dx_1 \ldots dx_{2q},$$

$$A = \| a_{\alpha\beta} \| = \begin{pmatrix} \| r_\xi(t_i, t_j) \| & \| r_{\xi\zeta}(t_i, t_j) \| \\ \| r_{\xi\zeta}(t_i, t_j) \| & \| r_\zeta(t_i, t_j) \| \end{pmatrix}^{-1}; \quad \begin{array}{l} \tilde{s}_l = \tilde{s}(t_i), \ s_{\xi l} = s_\xi(t_i), \\ g = \Sigma\pi_i, \quad h = \Sigma\sigma_l, \\ i = 1, \ldots, q. \end{array}$$

В этом выражении полином $H_{\pi_1 \ldots \sigma_q}$ произведен матрицей A, полином $\tilde{G}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ — матрицей $\| \tilde{a}_{\alpha\beta} \| = \| \tilde{r}(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}$; $(\alpha, \beta = 1, \ldots, q)$.

Смешанные квазимоменты отыскиваются аналогично нахождению смешанных квазимоментов (2.6). В результате получим

$$b_{(u)\xi, (v)\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)}, t_1'^{(\nu_1)}, \ldots, t_q'^{(\nu_q)}) =$$

$$= \sum \gamma_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q \pi_1 \ldots \pi_{p+q} \sigma_1 \ldots \sigma_q} \times \qquad (2.9)$$

$$\times b_{(g)\xi, (h)\zeta}(t_1^{(\pi_1)}, \ldots, t_p^{(\pi_p)}, t_1'^{(\pi_{p+1})}, \ldots, t_q'^{(\pi_{p+q})}, t_1'^{(\sigma_1)}, \ldots, t_q'^{(\sigma_q)}),$$

причем

$$\gamma_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q \pi_1 \ldots \pi_{p+q} \sigma_1 \ldots \sigma_q} = \frac{(\operatorname{Det} A)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}+q}} \frac{1}{\pi_1! \ldots \pi_{p+q}! \sigma_1! \ldots \sigma_q!} \cdot$$

$$\cdot \int \cdots \int e^{-\frac{1}{2}\sum_1^{p+q} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta} H_{\pi_1 \ldots \pi_{p+q} \sigma_1 \ldots \sigma_q}(x_1, \ldots, x_{p+2q}) \times$$

$$\times \tilde{G}_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q}(x_1, \ldots, x_p; f(x_{p+1} + s_{\xi 1}, x_{p+q+1} + s_{\zeta 1}) -$$

$$- \tilde{s}_1, \ldots, f(x_{p+q} + s_{\xi q}, x_{p+2q} + s_{\zeta q}) - \tilde{s}_q) dx_1 \ldots dx_{p+2q}.$$

Здесь $u = \sum \mu_i$, $v = \sum \nu_i$, $q = \sum \pi_i$, $h = \sum \sigma_i$;

$$A = \|a_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \|r_\xi(t_m, t_n)\| & \|r_\xi(t_m, t_j')\| & \|r_{\xi\zeta}(t_m, t_l')\| \\ \|r_\xi(t_i', t_n)\| & \|r_\xi(t_i', t_j')\| & \|r_{\xi\zeta}(t_i', t_l')\| \\ \|r_{\zeta\xi}(t_k', t_n)\| & \|r_{\zeta\xi}(t_k', t_j')\| & \|r_\zeta(t_k', t_l')\| \end{pmatrix}^{-1}$$

$$m, n = 1, \ldots, p; \; i, j, k, l = 1, \ldots, p.$$

Матрица A является производящей матрицей для полинома Чебышева-Эрмита $H_{\pi_1 \ldots \sigma_q}$. Полином же $\widetilde{G}_{\mu_1 \ldots \nu_q}$ произведен матрицей

$$\|\widetilde{\alpha}_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \|r_\xi(t_m, t_n)\| & \|\rho(t_i', t_n)\| \\ \|\rho(t_j', t_n)\| & \|r(t', t_j')\| \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{matrix} m, n = 1, \ldots, p \\ i, j = 1, \ldots, p. \end{matrix}$$

3. Рассмотрим теперь тот частный случай, когда $\zeta(t) = \frac{d}{dt}\xi(t)$, т. е.

$$\eta(t) = f\left(\xi(t), \frac{d\xi(t)}{dt}\right).$$

Для того чтобы в этом случае функции $b_{(g)\xi,\,(h)\zeta}$ находились простым дифференцированием квазимоментных функций $b_{(k)\xi}(t_1, \ldots, t_k)$, следует положить

$$s_\xi(t) = s(t), \; s_\zeta(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$r_\xi(t_1, t_2) = r(t_1, t_2); \; r_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} r(t_1, t_2); \; r_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\partial_1}{\partial t_1 \partial t_2} r(t_1, t_2). \quad (2.1)$$

Тогда будем иметь

$$b_{(g)\xi,\,(h)\zeta}(t_1, \ldots, t_{g+h}) = \frac{\partial^h}{\partial t_{g+1} \ldots \partial t_{g+h}} b_{(g+h)\xi}(t_1, \ldots, t_{g+h}). \quad (2.12)$$

Итак, зная квазимоментные функции $b_{(k)\xi}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, по формулам (2.8), (2-12) можно определить квазимоментные функции случайного процесса (2.10). Обратная задача об отыскании квазимоментных функций процесса $\xi(t)$, задаваемого нелинейным дифференциальным уравнением (2.10), где $\eta(t)$ считается известной случайной функцией, заданной своими квазимоментными функциями, кратко рассмотрена в работе [3].

§ 3 Пример

Пусть на линейнуm систему с переходной функцией

$$g(t - t') = \begin{cases} \beta \exp[-\beta(t - t')] & \text{при } t - t' \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } t - t' < 0 \end{cases}$$

воздействуют стационарные релеевские флюктуации, имеющие плотности вероятности

$$w_1(A) = \frac{A}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{A^2}{\sigma^2}\right),$$

$$w_2(A_1, A_2) = \frac{A_1A_2}{\sigma^4 p_1^2}\exp\left(-\frac{A_1^2+A_2^2}{2\sigma^2 p_1^2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left(\frac{pA_1A_2}{\sigma^2 p_1^2}\cos\varphi\right)d\varphi, \qquad (3.1)$$

$$w_3(A_1, A_2, A_3) = \frac{A_1A_2A_3}{\sigma^6 p_4^2}\exp\left(-\frac{p_3^2A_1^2+p_2^2A_2^2+p_1^2A_3^2}{2\sigma^2 p_4^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\sigma^{-2}p_4^2[q_1^2A_1A_2\cos\varphi_1 + q_2A_1A_3\cos\varphi_2 + q_3A_2A_3\cos(\varphi_2-\varphi_1)]\}\,d\varphi_1 d\varphi_2,$$

где $p_1^2 = 1-\rho^2(\tau_1) = 1-\rho_1^2$, $q_1 = \rho_1 - \rho_2\rho_3$, $p_2^2 = 1-\rho^2(\tau_2) = 1-\rho_2^2$, $q_2 = \rho_2 - \rho_1\rho_3$, $p_3^2 = 1-\rho^2(\tau_2-\tau_1) = 1-\rho_3^2$, $q_3 = \rho_3 - \rho_1\rho_2$, $p_4^2 = 1-\rho_1^2 - -\rho_2^2-\rho_3^2-2\rho_1\rho_2\rho_3$, $\rho(\tau_1) = \exp(-\alpha|\tau_1|)$ $(\tau_1 = t_2-t_1, \tau_2 = t_3-t_1)$, $(0<A_i<\infty)$

Одномерный, двумерный и трехмерный законы распределения на входе и выходе линейной системы представим в форме разложений (1.17). В качестве образующих функций выберем корреляционные функции $s(t) = k_1 = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $r(t_1, t_2) = k_2(t_1, t_2)$. В этом случае ряд (1.17) будет начинаться с члена, содержащего третью квазимоментную функцию, совпадающую с корреляционной:

$$b_3(t_1, t_2, t_3) = b_3(t_1, t_1+\tau_1, t_1+\tau_2) = k_3(\tau_1, \tau_2).$$

Согласно сказанному в пункте 7, аналогичные функции на выходе линейной системы в стационарном случае преобразуются по формулам

$$\widetilde{s} = k_1\int_1^{\infty} g(x)\,dx,$$

$$\widetilde{r}_2(\tau_1) = \widetilde{k}_2(\tau_1) = \int_0^{\infty} g(x)\,dx\int_{-\infty}^{\tau+x} g(\tau+x-y)\,k_2(y)\,dy, \qquad (3.2)$$

$$\widetilde{b}_3(\tau_1, \tau_2) = \widetilde{k}_3(\tau_1, \tau_2) = \int_0^{\infty} g(x)\,dx\int_{-\infty}^{\tau_1+x}\int_{-\infty}^{\tau_2+x} g(\tau_1+x-y)\,g(\tau_2+x-z)\,k_3(y, z)\,dy\,dz.$$

Экспериментальные и расчетные данные показывают [8], что флюктуации $\eta(t)$, получающиеся на выходе системы, имеют плотности вероятности, которые удовлетворительно аппроксимируются выражениями, содержащими лишь третью квазимоментную функцию:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\eta-\widetilde{s})^2}{2\sigma_2^2}\right]\left[1+\frac{b_3}{3!}H_3\left(\frac{\eta-\widetilde{s}}{\sigma_2}\right)\right]$$

$$W_2(\eta_{l1},\ \eta_{l2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2\sqrt{1-R^2}}\exp\left[-\frac{(\eta_{l1}-\widetilde{s})^2+(\eta_{l2}-\widetilde{s})^2-2R(\eta_{l1}-\widetilde{s})(\eta_{l2}-\widetilde{s})}{2\sigma^2(1-R^2)}\right]\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{3!}\,b_{30}\left[H_{30}\left(\frac{\eta_{l1}-\widetilde{s}}{\sigma_2},\ \frac{\eta_2-\widetilde{s}}{\sigma_2}\right)+H_{03}\left(\frac{\eta_{l1}-\widetilde{s}}{\sigma_2},\ \frac{\eta_2-\widetilde{s}}{\sigma_2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{b_{21}}{2}\left[H_{21}\left(\frac{\eta_{l1}-\widetilde{s}}{\sigma_2},\ \frac{\eta_2-\widetilde{s}}{\sigma_2}\right)+H_{12}\left(\frac{\eta_{l1}-\widetilde{s}}{\sigma_2},\ \frac{\eta_{l2}-\widetilde{s}}{\sigma_2}\right)\right]\right\}.$$

Здесь σ_2^2 и $R(\tau)$ — дисперсия и коэффициент корреляции для $\eta(t)$, $b_{21}(\tau) = k_3(t,\ t,\ t+\tau)$ — квазимоментная функция.

Если вычислить корреляционные функции $k_2(\tau)$, $k_3(\tau_1,\ \tau_2)$ для релеевских флюктуаций и затем воспользоваться формулами (3.2), то нетрудно получить явные выражения для σ_2^2, $R(\tau)$ и $b_{21}(\tau)$. В частности, если $\rho(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$, то

$$\sigma_2^2 = \frac{0{,}914}{1+2\gamma}+\frac{0{,}057}{1+4\gamma},\quad \gamma=\frac{\alpha}{\beta},$$

$$R(\tau) = \sigma_2^{-2}\left[\frac{0{,}914}{1-(2\gamma)^2}(e^{-2\alpha|\tau|}-2\gamma e^{-\beta|\tau|})+\frac{0{,}057}{1-(4\gamma)^2}(e^{-4\alpha|\tau|}-4\gamma e^{-\beta|\tau|})\right]$$

Значения b_{21} приведены в следующей таблице.

Таблица

Значение коэффициента асимметрии b_{21}

τ	$\frac{b_{30}}{\alpha\tau=0}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,1	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0	0.637	0.526	0.389	0.274	0.188	0.128	0.059	0.0265	0.012	0.005	0.0024
0.2	0.808	0·738	0.596	0.446	0.315	0.225	0.106	0.0485	0.022	0.010	0.0044
0.4	0.851	0.805	0.696	0.571	0.446	0.340	0.185	0.0947	0.047	0.023	0.0108
0.6	0.862	0.829	0.743	0.639	0.530	0.428	0.266	0.158	0.091	0.045	0.0279
0.8	0.855	0.827	0.762	0.675	0.580	0.480	0.334	0.219	0.140	0.087	0.0553
1.0	0.842	0.822	0.764	0.692	0.610	0.522	0.386	0.272	0.189	0.129	0.0862
2	0.759	0.748	0.725	0.688	0.640	0.593	0.500	0.417	0.344	0.282	0.232
3	0.686	0.678	0.662	0.637	0.601	0.579	0.516	0.455	0.400	0.350	0.307
4	0.626	0.620	0.609	0.591	0.570	0.550	0.503	0.460	0.417	0.377	0.341
5	0.582	0.579	0.568	0.558	0.540	0.525	0.489	0.453	0.420	0.386	0.358
10	0.444	0.444	0.437	0.433	0.429	0.422	0.403	0.376	0.391	0.362	0.348
15	0.371	0.371	0.368	0.366	0.362	0.359	0.351	0.341	0.333	0.324	0.314
20	0.326	0.326	0.324	0.322	0.321	0.318	0.312	0.306	0.300	0.295	0.288
30	0.276	0.276	0.276	0.275	0.274	0.272	0.268	0.263	0.261	0.258	0.258
40	0.236	0.236	0.236	0.236	0.234	0.233	0.228	0.226	0.228	0.224	0.222

Из таблицы видно, что коэффициент асимметрии $b_3 = b_{30} = b_{21}(0)$ уменьшается с ростом γ. Степень уменьшения коэффициента b_3 характеризует нормализацию рассматриваемых флюктуаций $A(t)$ линейной инерционной системой.

Поступила в редакцию
15.3.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение случайных функций через линейные системы, Автоматика и телемеханика, **14**, 2 (1953).
[2] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Автоматика и телемеханика, **14**, 4 (1953), **15**, 3 (1954).

[3] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Квазимоментные функции в теории случайных процессов, ДАН СССР, 94, 4 (1954), 615—618.
[4] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин ГИТТЛ, 1949.
[5] Г. Крамер, Математические методы статистики, ГИИЛ, 1948.
[6] P. Appel et J. Kampé de Fériet, Functions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite, Paris, 1926.
[7] С. Х. Сираждинов, К теории многомерных полиномов Эрмита, Труды института мат. и мех. АН Уз.ССР, вып. 5, 1949.
[8] В. И. Тихонов, А. А. Толкачев, Воздействие ненормальных флюктуаций на линейные системы, Изв. АН СССР, отд. технич. наук, 12 (1956).

QUASIMOMENT FUNCTION IN STOCHASTIC PROCESS THEORY

P. I. KUZNETSOV, R. L. STRATONOVICH, V. I. TIHONOV (MOSCOW)

(Summary)

Instead of the system of generalized correlation functions, which statistically describe completely the stochastic process a new system of functions is introduced called quasimoment functions, which also completely describe the process.

The characteristic function of a multi-dimensional distribution (formula 1.17) is easily expressed through quasimoment, just as through correlation functions. This characteristic function is represented as the product of two factors; the first factor gives the characteristic function for a given Gaussian process with about the same mean value and correlation function as for the initial process, while the second factor (represented as a series) accounts for the deviation of the characteristic function from the Gaussian. Moreover, probability densities of different multiplicities may be written through the introduced functions. This is important in solving problems connected with condition probability and others.

Quasimoment functions serve as the coefficients when expanding the probability density of multi-dimensional distributions in a series (1.20) in Hermite's multi-dimensional polynomials (a generalized Edgeworth series). Thus, the problem of determining the error committed when breaking off the sequence of quasimoment functions amounts to solving the well known convergence problem of orthagonal polynomial expansions and the accuracy with which the function may be represented by the final series.

By means of quasimoment functions and Hermite's multi-dimensional polynomials, it becomes just as simple to write the probability density for distributions of any multiplicity including the continual distribution (a functional probability giving the distribution in a functional space).

It allows to solve several important problems, e. g., the problem of non-linear extrapolation, interpolation and filtration of non-Gaussian processes.

The orthogonality of Hermite's multi-dimensional polynomials is used for determination the quasimoment functions as ensemble averages from corresponding polynomials.

A derived formula connects quasimoment with correlation functions.

It is shown that with linear and non-linear transformations of stochastic processes quasimoment functions are transformed linearly.

The transformation of Rayleigh's stochastic process to a linear system is considered as an example.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1960

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О РАВНОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА

Ю. В. ПРОХОРОВ

Введение. Пусть $F(x)$ — произвольная функция распределения, $\mathfrak{G}$ — совокупность всех неограниченно-делимых функций распределения, $F^n(x)$ — функция распределения суммы

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где ξ_j независимы и имеют одно и то же распределение F. Обозначим*

$$\rho_1(F, G) = \sup_{-\infty<x<+\infty} |F(x) - G(x)| \tag{0.1}$$

и

$$\psi_1(n) \sup_F \rho_1(F^n, \mathfrak{G}).$$

А. Н. Колмогоров показал [1], что**

$$\psi_1(n) \leqslant C_1 n^{-\frac{1}{5}}. \tag{0.2}$$

В настоящей работе улучшается оценка сверху (0.2) и дается нижняя оценка для $\psi_1(n)$. Именно, доказывается, что

$$C_3 n^{-1} (\log n)^{-1} \leqslant \psi_1(n) \leqslant C_2 n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n. \tag{0.3}$$

Нижняя граница для $\psi_1(n)$ устанавливается при изучении примера биномиальной функции распределения

$$F_p^n(x) = \sum_{m<n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

с параметрами n и $p = n^{-1}$. Интересно отметить, что в классе биномиальных распределений верхние оценки могут быть (заметно) улучшены: для

$$\psi_B(n) = \sup_p \rho_1(F_p^n, \mathfrak{G})$$

справедливо неравенство

$$\psi_B(n) \leqslant C_4 n^{-\frac{2}{3}}. \tag{0.4}$$

(Л. Д. Мешалкин [7]; возможно, что правая часть (0.4) дает правильную по порядку оценку $\psi_B(n)$).

Значительно меньше известно о возможности аппроксимации распределений сумм неограниченно-делимыми распределениями в смысле расстояния «по вариации»:

$$\rho_2(F, G) = \frac{1}{2} \operatorname{var}(F(x) - G(x)). \tag{0.5}$$

---

* В дальнейшем буквы $C_1, C_2, \ldots; N_1, N_2, \ldots$ $(N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots)$ обозначают абсолютные положительные постоянные. Буква θ обозначает числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы.

** В теореме 1 этой работы выражение для δ должно иметь вид

$$\delta = C \max\left(\frac{l}{L}\sqrt{\log\frac{L}{l}},\ \varepsilon^{1/4}\right).$$

Неизвестно, например, стремится ли к нулю при $n \to \infty$

$$\psi_2(n) = \sup_F \rho_2(F^n, \mathfrak{G}).$$

Однако в отдельных случаях можно найти правильные порядки скорости сближения распределений сумм с неограниченно-делимыми распределениями. Так, скажем, для биномиального распределения F_p^n с параметрами $p = \frac{1}{2}$ или $p = n^{-1}$ можно показать, что

$$C_6 n^{-1} \leqslant \rho_2(F_p^n, \mathfrak{G}) \leqslant C_5 n^{-1}. \tag{0.6}$$

Методы получения верхних оценок в общих чертах совпадают с использованными в работах [1] — [4]. Нижние оценки здесь устанавливаются впервые. Основное затруднение представляет при этом то обстоятельство, что при оперировании с произвольными неограниченно-делимыми законами не на что опереться, кроме формулы Леви-Хинчина для логарифмов характеристических функций таких законов.

Детальное изучение точности приближений специальных распределений неограниченно-делимыми проводилось И. П. Цареградским [4 — 6] и Л. Д. Мешалкиным [7], а также, в несколько иной постановке — Ю. П. Студневым. Отмечу, наконец, что все указанное направление исследований в целом возникло под влиянием работы А. Н. Колмогорова [8].

1. **Оценка сверху для $\psi_1(n)$.** В доказательстве приводимой ниже теоремы $E_a(x)$ обозначает вырожденную функцию распределения со скачком в точке a; $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$ обозначает нормальную функцию распределения со средним a и дисперсией σ^2; $Q_\xi(l)$ обозначает функцию концентрации случайной величины ξ:

$$Q_\xi(l) = \sup_{-\infty < z < +\infty} \mathbf{P}\{z \leqslant \xi \leqslant z + l\}.$$

Теорема 1. *Существует такая константа C_2, что для любой F найдется $G_n \in \mathfrak{G}$, для которой при всех x*

$$|F^n(x) - G_n(x)| < C_2 n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n.$$

Из сформулированных ниже лемм две — вторая и шестая — доказываются очень просто. Лемма 4 есть известное следствие теоремы Ляпунова в формулировке Эссеена ([9], стр. 216).

Лемма 1. *Пусть независимые величины τ_{lk}, $1 \leqslant k \leqslant n$, таковы, что при некоторых $l > 0$ и x*

$$\mathbf{P}\{\tau_{lk} \geqslant x + l\} = \mathbf{P}\{\tau_{lk} \leqslant x - l\} = \frac{1}{2}.$$

Тогда при $L \geqslant l\sqrt{\log n}$, $n \geqslant 2$ для $\tau_l = \tau_{l1} + \tau_{l2} + \cdots + \tau_{ln}$ верна оценка

$$Q_\tau(L) \leqslant \frac{C_7 L}{l\sqrt{n}}.$$

Эта лемма есть частный случай леммы 1 из работы А. Н. Колмогорова [1].

Лемма 2. *При всех x*

$$\left|\Phi_{a,\sigma^2}(x) - \Phi_{a,\sigma_1^2}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\sigma_1}{\sigma} - 1\right|.$$

Лемма 3. *Если $0 \leqslant p \leqslant 1$, то*

$$\sum_{m=0}^{n}\left|C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - \frac{(np)^m}{m!}e^{-np}\right| \leqslant C_8 p.$$

Доказательство см. в [10].

Лемма 4. *Пусть независимые величины ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ таковы, что*

$$|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k| \leqslant l', \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда при всех x

$$|F^n(x) - \Phi_{A,B^2}(x)| \leqslant C_9 \frac{l'}{B}.$$

где $A = \mathbf{M}s_n$, $B^2 = \mathbf{D}s_n$.

Лемма 5. *Пусть* ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ — *независимые случайные величины такие, что*

$$|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k| \leqslant l', \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{s_n < A - x\} \leqslant e^{-\frac{x^2}{4B^2}}, \text{ при } 0 < xl' \leqslant B^2;$$

$$\mathbf{P}\{s_n < A - x\} \leqslant e^{-\frac{x}{4l'}}, \text{ при } xl' \geqslant B^2.$$

Доказательство см. в [11].

Лемма 6. *При* $x > 0$

$$\Phi_{A,B^2}(A - x) = 1 - \Phi_{A,B^2}(A + x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2B^2}}.$$

Доказательство теоремы 1. Положим $p = n^{-\frac{1}{3}}$. Определим числа x_n^+ и x_n^- из соотношений

$$F(x_n^-) \leqslant \frac{p}{2} \leqslant F(x_n^- + 0), \quad F(x_n^+) \leqslant 1 - \frac{p}{2} \leqslant F(x_n^+ + 0)$$

(возможная неоднозначность в выборе x_n^+ и x_n^- не играет никакой роли — любая пара чисел, удовлетворяющих вышеприведенным неравенствам, одинаково пригодна для последующих построений). Обозначим

$$x_n = \frac{x_n^+ + x^-}{2}, \quad l = \frac{x_n^+ - x_n^-}{2}.$$

Первый случай: $l = 0$. В этом случае

$$q' = \mathbf{P}\{\xi_k = x_n\} \geqslant 1 - n^{-\frac{1}{3}}.$$

Обозначая $p' = 1 - q'$ и

$$F_1(x) = \mathbf{P}\{\xi_k < x \mid \xi_k \neq x_n\},$$

получим

$$F(x) = q' E_{x_n}(x) + p' F_1(x).$$

По лемме 3,

$$F^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p'^m q'^{n-m} F_1^{m} * E_{x_n}^{n-m} =$$

$$= E_{x_n}^n * \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(np')^m}{m!} e^{-np'} (F_1 * E_{-x_n})^m + \theta n^{-\frac{1}{3}} + \theta C_8 n^{-\frac{1}{3}}.$$

Обозначая первое слагаемое в правой части последнего равенства G_n, находим, что при всех x

$$|F^n(x) - G_n(x)| < (1 + C_8) n^{-\frac{1}{3}}. \tag{1.1}$$

Второй случай: $l > 0$. В этом случае $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = qF_2(x) + pF_1(x), \quad q = 1 - p,$$

где изменение F_2 сосредоточено на $[x_n - l,\ x_n + l]$, а изменение F_1 — вне $(x_n - l,\ x_n + l)$. При этом F_1 удовлетворяет условиям леммы 1. Замечая, что

$$\sum_{|m-np| \geqslant \sqrt{n}} C_n^m p^m q^{n-m} \leqslant \frac{npq}{n} < p \tag{1.2}$$

и

$$\sum_{|m-np| \geqslant \sqrt{n}} \frac{(np)^m}{m!} e^{np} \leqslant \frac{np}{n} = p, \tag{1.3}$$

получаем, в силу леммы 3,

$$F^n = \sum_{|m-np| < \sqrt{n}} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} F_1^m * F_2^{n-m} + \theta C_8 n^{-\frac{1}{3}} + \theta n^{-\frac{1}{3}}. \tag{1.4}$$

Пусть распределение F_2 имеет среднее a и дисперсию $\sigma^2 > 0$. Условимся, что всюду, где не оговорено противное, целое m удовлетворяет неравенству $|m - np| < \sqrt{n}$

Случай 2а:

$$\frac{l}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{4 \log n}. \tag{1.5}$$

Мы имеем

$$|F_1^m * F_2^{n-m}(x) - F_1^m * \Phi_{(n-m)a;\,(n-m)\sigma^2}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |F_2^{n-m}(x-z) - \Phi_{(n-m);\,(n-m)\sigma^2}(x-z)|\, dF_1^m(z) = \int_S + \int_{\overline{S}}, \tag{1.6}$$

где S — множество тех x, для которых

$|x - z - (n-m)a| \leqslant X = \sigma\sqrt{n}\log n$, а $\overline{S}$ — дополнительное множество.

Очевидно, в силу (1.5),

$$\frac{2X}{l} = \frac{2\sigma\sqrt{n}\log n}{l} \geqslant 8\log^2 n > \sqrt{\log m}.$$

Интеграл $\int_S$ не превосходит максимума подынтегральной функции, умноженного на $\int_S dF_1^m(z)$, т. е., в силу лемм 4 и 1 не превосходит

$$C_9 \frac{2l}{\sigma\sqrt{n-m}} \cdot \frac{C_7 \cdot 2X}{l\sqrt{m}} \leqslant C_{10} n^{-\frac{1}{3}} \log n.$$

Далее, величина подынтегральной функции в $\int_{\overline{S}}$ на участке $x - z < (n_1 - m)a - X$ не превосходит

$$F_2^{n-m}((n-m)a - X) + \Phi_{(n-m)a,\,(n-m)\sigma^2}((n-m)a - X),$$

что, в силу лемм 5 и 6, не превосходит $C_{11} \cdot n^{-\frac{1}{3}}$. Аналогичная оценка справедлива и из участка $x - z > (n-m)a + X$. Поэтому $\int_{\overline{S}} \leqslant C_{11} n^{-\frac{1}{3}}$ и

$$\int_S + \int_{\overline{S}} \leqslant C_{10} n^{-\frac{1}{3}} \log n + C_{11} n^{-\frac{1}{3}}. \tag{1.7}$$

Теперь, по лемме 2

$$\sup_x |F_1^m * \Phi_{(n-m)a;\,(n-m)\sigma^2}(x) - F_1^m * \Phi_{(n-m)a;\,(n-np)\sigma^2}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{n-np}} - 1\right| \leqslant C_{12}\, n^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Из (1.4), (1.6), (1.7), (1.8) и (1.3) выводим

$$F^n = \Phi_{na,\,(n-np)\sigma^2} * \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} (F_1 * F_{-a})^m + \quad \theta \cdot C_{13} \cdot n^{-\frac{1}{3}} \log n.$$

Обозначая первое слагаемое в правой части последнего равенства G_n, получим в случае 2а: при всех x

$$|F^n(x) - G_n(x)| \leqslant C_{13}\, n^{-\frac{1}{3}} \log n. \tag{1.9}$$

Случай 2 б:

$$\frac{l}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{4\log n}. \tag{1.10}$$

Возьмем $X = 8l(\log n)^2$. Мы имеем

$$|F_1^m * F_2^{n-m}(x) - F_1^m * E_{(n-m)a}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |F_2^{n-m}(x-z) - E_{(n-m)a}(x-z)|\, dF_1^m(z) = \int_S + \int_{\overline{S}}, \tag{1.11}$$

где $S = \{z: |x - z - (n-m)a| \leqslant X\}$, а $\overline{S}$ — дополнительное множество. Так как $2X > l\sqrt{\log m}$, то по лемме 1 $\int_S$ не превосходит

$$\int_S dF_1^m(z) \leqslant \frac{C_7 \cdot 2X}{l\sqrt{m}} \leqslant C_{14} n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n. \tag{1.12}$$

Далее, $\int_{\overline{S}}$ не превосходит

$$F_2^{n-m}((n-m)a - X) + 1 - F_2^{n-m}((n-m)a + X).$$

Так как

$$\frac{X \cdot 2l}{(n-m)\sigma^2} > \frac{16l^2(\log n)^2}{n\sigma^2} \geqslant 1,$$

то, по лемме 5,

$$\int_{\overline{S}} \leqslant 2e^{-\frac{X}{4\cdot 2l}} \leqslant C_{15}\, n^{-\frac{1}{3}}.$$

Следовательно при всех x

$$|F_1^m * F^{n-m}(x) - F_1^m * E_{(n-m)a}(x)| \leqslant C_{16}\, n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n$$

и

$$F^n = E_n * \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} (F_1 * E_{-a})^m + \theta C_{18}\, n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n.$$

Обозначая первое слагаемое в правой части последнего равенства G_n, получим в случае 2б: при всех x

$$|F^n(x) - G_n(x)| \leqslant C_{18} n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n. \tag{1.13}$$

Из (1.1), (1.9) и (1.13) вытекает утверждение теоремы 1.

2. Оценка снизу для $\psi_1(n)$.

Теорема 2. *Для биномиального распределения с параметрами n и $p = \frac{1}{n}$*

$$\rho_1\left(F^n_{\frac{1}{n}}, \mathfrak{G}\right) \geqslant C_3 n^{-1} (\log n)^{-1}, \tag{2.1}$$

Доказательство теоремы 2.

Лемма 7. *Пусть $\varphi(u)$ — непрерывная на всей прямой функция, $\delta\varphi$ — оператор, заданный равенством*

$$\delta\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1} \varphi(z)\,dz - \varphi(u).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\delta\varphi(u)|^2 du \leqslant 4\,\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(u)|^2 du.$$

Доказательство. Прежде всего

$$|\delta\varphi(u)|^2 \leqslant 2\left[\left|\frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1}\varphi(z)\,dz\right|^2 + |\varphi(u)|^2\right] \leqslant 2\left[\frac{1}{2}\int_{u-1}^{u+1}|\varphi(z)|^2 dz + |\varphi(u)|^2\right],$$

и потому

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\delta\varphi(u)|^2 du \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} du \int_{u-1}^{u+1}|\varphi(z)|^2 dz + 2\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(u)|^2 du.$$

Меняя порядок интегрирования, сразу получаем неравенство

$$\int_{-T}^{T} du \int_{u-1}^{u+1}|\varphi(z)|^2 dz \leqslant \int_{-T-1}^{T+1}|\varphi(z)|^2 dz \int_{z-1}^{z+1} du = 2\int_{-T-1}^{T+1}|\varphi(z)|^2 dz.$$

Окончательно

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\delta\varphi(u)|^2 du \leqslant 2\,\frac{2T+2}{2T}\,\frac{1}{2T+2}\int_{-T-1}^{T+1}|\varphi(z)|^2 dz + 2\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(u)|^2 du.$$

откуда и вытекает утверждение леммы 7.

Лемма 8. *Пусть $g(t)$ — неограниченно-делимая характеристическая функция с каноническим представлением*

$$\log g(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dW(u).$$

Тогда

$$-\delta \log g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dV(u),$$

где $V(u)$ — неубывающая функция с ограниченным изменением

$$V(u) = \int_{-\infty}^{u} \left(1 - \frac{\sin v}{v}\right) \frac{1+v^2}{v^2}\, dW(v).$$

Лемма 8 доказывается прямым подсчетом (ср. [9], стр. 86).

Выберем p, $0 < p < \frac{1}{2}$ и рассмотрим характеристическую функцию биномиального распределения с параметрами n и p

$$f_p^n(t) = (q + pe^{it})^n$$

и характеристическую функцию

$$h_p(t) = |f_p^n(t)|^2 = (q + pe^{-it})^n (q + pe^{it})^n.$$

Мы имеем

$$\delta \log h_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m u_m e^{itm} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m u_{-m} e^{-itm},$$

где

$$u_m = \frac{n(p/q)^m}{m}\left(1 - \frac{\sin m}{m}\right) > 0.$$

Поэтому разность $\delta \log h_p(t) - \delta \log g(t)$ есть преобразование Фурье — Стилтьеса некоторой функции $S(u)$ с ограниченным изменением и, следовательно, предел

$$L = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\delta \log h_p(t) - \delta \log g(t)|^2 dt$$

существует и равен сумме квадратов скачков функции $S(u)$. Обозначим v_m скачок $V(u)$ в точке m. Тогда, во всяком случае, будет выполнено неравенство

$$L \geqslant (v_2 + u_2)^2 + (v_{-2} + u_{-2})^2 \geqslant 2u_2^2 \geqslant \frac{1}{8} n^2 p^4.$$

Последнее неравенство вместе с леммой 7 позволяют сформулировать

Следствие: *Какова бы ни была неограниченно-делимая характеристическая функция $g(t)$, при $0 < p < \frac{1}{2}$*

$$\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\log h_p(t) - \log g(t)|^2 dt \geqslant \frac{1}{4} \frac{1}{8} n^2 p^4. \tag{2.2}$$

Заметим теперь, что при всех n и t $|f_{\frac{1}{n}}^n(t)| \geqslant C_{19}$. Если $g_1(t)$ такая неограниченно-делимая характеристическая функция, что

$$\mu = \sup_t |f_{\frac{1}{n}}^n(t) - g_1(t)| \leqslant \frac{1}{2} C_{19},$$

то при всех t $|g_1(t)| \geqslant \frac{1}{2} C_{19}$. Обозначая $g(t) = |g_1(t)|^2$, получим: при всех t

$$|\log h_{\frac{1}{n}}(t) - \log g(t)| \leqslant 4C_{19}^{-9} |h_{\frac{1}{n}}(t) - g(t)| \leqslant 4C_{19}^{-2} \cdot 2 |f_{\frac{1}{n}}^n(t) - g_1(t)| \leqslant C_{20}\mu.$$

В силу (2.2) отсюда выводим $\mu \geqslant C_{21} n^{-1}$. Учитывая просто доказываемое неравенство

$$\sup_t |f(t) - g(t)| \leqslant \mathrm{Var}\,(F(x) - G(x)) \tag{2.3}$$

и произвольный выбор характеристической функции $g_1(t)$, находим

$$\rho_2(F^n_{\frac{1}{n}}, \mathfrak{G}) \geqslant C_{22}n^{-1}. \tag{2.4}$$

Для вывода неравенства (2.1) нам нужно перейти от «расстояния» ρ_2 к «расстоянию» ρ_1. Для этого мы используем следующий довольно грубый прием.

Пусть $P(A)$ — какое-либо распределение, сосредоточенное в целых неотрицательных точках и $Q(A)$ — какое-либо другое распределение, Z_m — множество целых чисел от 0 до m включительно, A — произвольное измеримое множество на прямой. Тогда

$$|P(A) - Q(A)| \leqslant \sum_{k=0}^{m} |P(k) - Q(k)| + P(\overline{Z}_m) + Q(\overline{Z}_m).$$

Но

$$Q(\overline{Z}_m) \leqslant P(\overline{Z}_m) + \sum_{k=0}^{m} |P(k) - Q(k)|.$$

Поэтому для $F(x) = P\{u\colon u < x\}$ и $G(x) = Q\{u\colon u \leqslant x\}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Var}(F(x) - G(x)) = \sup_A |P(A) - Q(A)| \leqslant 2(m+1)2\rho_1(F, G) + 2(1 - F(m+1)).$$

Возьмем в качестве F функцию $F^n_{\frac{1}{n}}$, в качестве G — произвольную неограниченно-делимую функцию и выберем m равным наименьшему целому, превосходящему $8\log n$. Из леммы 5 легко вывести, что при таком выборе вероятность $1 - F^n_{\frac{1}{n}}(m+1)$ будет величиной $O(n^{-2})$. Следовательно

$$C_{22}\left(\log n\, \rho_1(F^n_{\frac{1}{n}}, G) + n^{-2}\right) \geqslant \rho_2\left(F^n_{\frac{1}{n}}, C\right) \geqslant C_{21}n^{-1},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 2.

3. Различные дополнения и примеры

а) Вернемся к формуле (0.6). При $p = \frac{1}{n}$. Пуассоновское распределение

$$\Pi(x) = \sum_{m<x} \frac{1}{m!}\, e^{-1}$$

удовлетворяет, по лемме 3, неравенству

$$\rho_2\left(F^n_{\frac{1}{n}}, \Pi\right) \leqslant (C_8 + 1)\, n^{-1}$$

С другой стороны (см. (2.4)), для любого неограниченно-делимого распределения G

$$\rho_2\left(F^n_{\frac{1}{n}}, G\right) \geqslant C_{21}n^{-1}.$$

Тем самым формула (0.6) установлена для $p = n^{-1}$.

При $p = \frac{1}{2}$ и любом n правое неравенство (0.6) можно вывести, используя построенные И. П. Цареградским ([4]), лемма 2) законы $G^n_p(x)$. Левое неравенство (0.6) доказывается ниже (см. самый конец пункта б)

б) При p, по порядку большем $n^{-\frac{1}{2}}$, нижние оценки для $\rho_j(F^n_p, \mathfrak{G})$, $j = 1, 2$ можно

получить из следующих соображений. Положим

$$\Delta_2\varphi(u) = \varphi(2u) - 2\varphi(0) + \varphi(-2u),$$

$$\Delta_3\varphi(u) = \varphi(3u) - 3\varphi(u) + 3\varphi(-u) - \varphi(-3u),$$

$$\Delta_4\varphi(u) = \varphi(4u) - 4\varphi(u) + 6\varphi(0) - 4\varphi(-u) + \varphi(-4u).$$

Пусть $G(x)$ — неограниченно-делимая функция распределения. Представим логарифм соответствующей характеристической функции в канонической форме

$$\log g(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dW(x).$$

Тогда из того, что $\rho_j(F_p^n, G)$ «очень мало» можно вывести, что при τ по порядку несколько меньшем $\frac{1}{\sqrt{npq}}$, разности

$$\frac{\Delta_s \log f_p^n(\tau)}{2^s \tau^s} - \frac{\Delta_s \log g(\tau)}{2^s \tau^s}, \quad s = 2, 3, 4$$

«очень малы». При этом величины

$$A_s = (-i)^s \frac{\Delta_s \log f_p^n(\tau)}{2^s \tau^s}$$

«очень близки» к соответствующим семиинвариантам биномиального распределения, т. е., при $s = 2, 3, 4$ к

$$npq,\ npq(q-p),\ npq(1-6\,pq), \qquad (3.1)$$

соответственно. Кроме того

$$B_s = (-i)^s \frac{\Delta_s \log g(\tau)}{2^s \tau^s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \tau x}{\tau} \right)^s \frac{1+x^2}{x^2}\, dW(x).$$

числа (3.1), а вместе с ними и A_s *не удовлетворяют* известным неравенствам между моментами, а числа B_s им удовлетворяют. Можно показать, что в силу этого, предположение об «очень сильной» малости ρ_j (ρ_j по порядку не превосходит, с точностью до логарифмических множителей, n^{-1}) приводит к противоречию.

С тем, чтобы не загромождать изложения, я рассмотрю подробно случай $p = \frac{1}{2}$; точнее, я рассмотрю случай независимых слагаемых ξ_k, принимающих значение 1 и -1, с вероятностью половина каждое.

Лемма 9. *Пусть при всех* x

$$|F^n(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{32 \cdot 12^4}\, n^{-1} (\log n)^{-2} = \mu.$$

тогда при $|t| \leqslant (3\sqrt{n \log n})^{-1} = \lambda$, $n \geqslant N_1'$,

$$|f^n(t) - g(t)| \leqslant 8\mu.$$

Доказательство. Выберем $A > 0$ так, чтобы A и $-A$ были точками непрерывности функций F^n и G и $2\sqrt{n \log n} < A < 3\sqrt{n \log n}$. Тогда

$$f^n(t) - g(t) = \int_{|x| \leqslant A} e^{itx} d(F^n - G) + \int_{|x| > A} e^{itx} d(F^n - G) = I_1 + I_2. \qquad (3.2)$$

Интегрируя I_1 по частям, получим при $|t| \leqslant \lambda$

$$|I_1| = |(F^n(A) - G(A)) e^{itA} - (F^n(-A) - G(-A)) e^{-itA} - \\ - it \int\limits_{|x|\leqslant A} (F^n(x) - G(x)) e^{itx} dx| \leqslant 2\mu + 2\lambda A\mu < 4\mu. \tag{3.3}$$

Далее, при $n \geqslant N_1'$

$$|I_2| \leqslant F^n(-A) + 1 - F^n(A) + G(-A) + 1 - G(A) \leqslant \\ \leqslant 2(F^n(-A) + 1 - F^n(A)) + 2\mu \leqslant 4\mu. \tag{3.4}$$

Из (3.2) — (3.4) вытекает утверждение леммы. Обозначим теперь $f_1(t) = |f(t)|^2$, $g_2(t) = |g(t)|^{\frac{2}{n}}$. Имеет место

Следствие. При $|t| \leqslant \lambda$, $n \geqslant N_2'$

$$|\log f_1(t) - \log g_1(t)| \leqslant \mu_1 = 32\mu n^{-1}. \tag{3.5}$$

В самом деле, по лемме 9 при $|t| \leqslant \lambda$, $n \geqslant N_1'$,

$|f_1^n(t) - g_1^n(t)| \leqslant 16\mu$ и, кроме того, $f_1^n(t) \geqslant \frac{1}{2}$, $g_1^n(t) \geqslant \frac{1}{2}$.

Поэтому при $|t| \leqslant \lambda$, $n \geqslant N_2'$

$$|n \log f_1(t) - n \log g_1(t)| \leqslant 2|f_1^n(t) - g_1^n(t)| \leqslant 32\mu,$$

откуда вытекает (3.5).

Положим $\tau = \lambda/4$. Из канонического представления

$$\log g_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dW_1(x)$$

выводим

$$B_4 = \frac{\Delta_4 \log g_1(\tau)}{2^4\tau^4} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \tau x}{\tau}\right)^4 \frac{1+x^2}{x^2} dW_1(x) \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Затем, исходя из разложения $\log \cos t$ в степенной ряд в окрестности $t = 0$, получаем

$$\log f_1(t) = -t^2 - \frac{t^4}{4} + O(t^6),$$

что при $n \geqslant N_3'$ приводит к неравенству

$$A_4 = \frac{\Delta_4 \log f_1(\tau)}{2^4\tau^4} = -4 + O(\tau^2) < -3. \tag{3.7}$$

Из (3.6), (3.7) и (3.5) теперь следует

$$3 \leqslant -(A_4 - B_4) = |A_4 - B_4| \leqslant \frac{\mu_1}{\tau^4} = 1,$$

что невозможно, т. е. для любого $G \in \mathfrak{G}$

$$\rho_1(F^n, G) \geqslant C_{21} \cdot n^{-1} (\log n)^{-2}.$$

Точно так же, предполагая

$$\rho_2(F^n, G) < \varepsilon \cdot n^{-1},$$

где ε достаточно мало, и, повторяя предшествующие рассуждения с $\tau = n^{-\frac{1}{2}}$, придем снова к противоречию. Из сказанного вытекает неравенство

$$\rho_2(F^n, \mathfrak{G}) \geqslant C_{24} n^{-1}.$$

Тем самым (0.6) полностью доказано.

Математический институт
Академии наук СССР им. В. А. Стеклова

Поступила в редакцию
16.10.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых, Теория вероят. и ее примен., **I**, 4 (1956), 426—436.
[2] W. Doeblin, Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, Bull. Sci. Math., **63**, 1, (1939), 23—32, 35—64.
[3] Ю. В. Прохоров, О суммах одинаково распределенных случайных величин, ДАН СССР, **105**, 4 (1955), 645—647.
[4] И. П. Цареградский, О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно-делимыми законами, Теория вероят. и ее примен., **III**, 4 (1958), 470—474.
[5] И. П. Цареградский, Приближение распределений сумм неограниченно-делимыми распределениями, Теория вероят. и ее примен. **IV**, 2 (1959), 243—246.
[6] И. П. Цареградский, Диссертация, МГУ, 1959.
[7] Л. Д. Мешалкин, О приближении неограниченно-делимыми законами полиномиальных распределений, Теория. вероят. и ее примен., **V**, 1 (1950), 114—124.
[8] А. Н. Колмогоров, Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей, Вестник Моск. ун-та 10 (1953), 29—38.
[9] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.
[10] Ю. В. Прохоров, Асимптотическое поведение биномиального распределения. Успехи Матем. наук, 8 : 3 (1953), 135—142.
[11] A. Н. Колмогоров, Über das Gesetz des Iterierten Logarithmus, Math. Ann. **109** (1928), 26—37.

ON A UNIFORM LIMIT THEOREM OF A. N. KOLMOGOROV

Yu. V. PROHOROV *(MOSCOW)*

(Summary)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent identically distributed random variables. Put

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_j < x\},\ F^n(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n < x\},$$

and

$$\psi(n) = \sup_F \inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_x |F^n(x) - G(x)|,$$

where $\mathfrak{G}$ is a set of all infinitely divisible laws.

Then, there exist two absolute constants C' and C'' such that

$$C' n^{-1} (\log n)^{-1} < \psi(n) < C'' n^{-\frac{1}{3}} (\log n)^2. \qquad (*)$$

The right-hand inequality (*) is an improvement of Kolmogorov's estimate [8]:

$$\psi(n) < C'' n^{-\frac{1}{5}}.$$

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННО-ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Л. Д. МЕШАЛКИН

Пусть $\mathfrak{G}$ — совокупность неограниченно-делимых законов распределения:

$$\rho_i(F, \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \rho_i(F, G), \ (i = 1,2)$$

где

$$\rho_1(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|,$$

$$\rho_2(F, G) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(F(x) - Q(x)).$$

В 1956 г. А. Н. Колмогоров [1] доказал, что существует такая абсолютная константа C, что для любой функции распределения F*

$$\rho_1(F^n, \mathfrak{G}) < Cn^{-\frac{1}{5}}$$

(здесь и в дальнейшем степень функции распределения понимается в смысле свертывания). Для целочисленных распределений результат А. Н. Колмогорова был усилен И. П. Цареградским [2], [3], [4]. Для схемы Бернулли И. П. Цареградским была получена оценка $Cn^{-\frac{1}{2}}$, для целочисленных симметричных и ограниченных по модулю постоянной s слагаемых $C(s)n^{-\frac{1}{2}}(\ln n)^{\frac{3}{2}}$, в общем случае ограниченных по модулю постоянной s целочисленных слагаемых $C(s)n^{-\frac{1}{3}}$. Метод, применяемый И. П. Цареградским, хорошо виден на примере приближения биноминального распределения [2]. Пусть p — вероятность успеха при одном испытании, а $F_p(x)$ — функция распределения результата одного испытания. При малых значениях $p \leqslant n^{-\frac{1}{2}}$ он использует Пуассоновское приближение, а при $n^{-\frac{1}{2}} < p \leqslant \frac{1}{2}$ сравнивает F_p^n с неограниченно-делимым законом, у которого первые три семиинварианта равны соответствующим семиинвариантам F_p^n.

Результаты И. П. Цареградского можно улучшить, так как оказывается возможным построить такое неограниченно-делимое распределение, у которого помимо первых трех семиинвариантов совпадают и главные части семиинвариантов более высокого порядка. Кроме того удается отказаться от предположений ограниченности и целочисленности (соизмеримости) значений, принимаемых случайными величинами. В настоящей работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для биноминального распределения существует такая абсолютная постоянная C, что:*

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \rho_1(F_p^n, \mathfrak{G}) < Cn^{-\frac{2}{3}}, \\ &\text{б)}\ \rho_1(F_p^{*n}, \mathfrak{G}) < Cn^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $F_p^*(x) = F_p(x) * [1 - F_p(-x + 0)]$.

---

* В работе Ю. В. Прохорова [6] для ρ_1 получаются оценки $C(n \log n)^{-1} < \rho_1(F^n, \mathfrak{G}) < C_2 n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n$.

Теорема 2. *Для каждого s найдется такое $C(s)$, что для любой случайной величины, принимающей не более $s+1$ значений, с функцией распределения $F(x)$:*

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \rho_2(F^n, \mathfrak{G}) < C(s)\, n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{\frac{s}{2}}, \\ &\text{б)}\ \rho_2(F^{*n}, \mathfrak{G}) < C(s)\, n^{-1} (\ln n)^s, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $F^*(x) = F(x) * [1 - F(-x+0)]$.

Получение нижних оценок связано с большими трудностями. Доказываемые в работе теоремы 3 и 4 в какой-то мере отвечают на вопрос, насколько окончательны оценки (1), (2). Пусть $\mathfrak{G}^M$ совокупность неограниченно-делимых законов, характеристические функции которых имеют вид

$$g(t) = \int_{-M}^{M} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG(u),$$

$\mathfrak{G}_1^M(a)$ совокупность целочисленных $G \in \mathfrak{G}^M$ таких, что математическое ожидание случайной величины, соответствующей G, равно a и $\mathfrak{G}_2^M(a)$ совокупность $G \in \mathfrak{G}^M$ таких, что дисперсия случайной величины, соответствующей G, равна a.

Теорема 3. *Для всякого $M > 0$ существует такая постоянная $C(M) > 0$, что*

$$\rho_1\left(F^n_{\frac{1}{n}}, \mathfrak{G}^M\right) > C(M)\, n^{-1} (\ln n)^{-\frac{1}{4}}.$$

Замечание. Теорема 3 была впервые предложена И. П. Цареградским в [4], но фактически было лишь доказано, что

$$\rho_1\left(F^n_{\frac{1}{2}}, \mathfrak{G}_2^M\left(\frac{n}{4}\right)\right) > C(M)\, n^{-1} (\ln n)^{-\frac{1}{4}}.$$

Теорема 4*. *Для всякого $M > 0$ существует $C(M) > 0$ такое, что*

$$\rho_1\left(F^n_{n^{-\frac{2}{3}}}, \mathfrak{G}_1^M(n^{\frac{1}{3}})\right) > C(M)\, n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-\frac{1}{4}}.$$

Приведем здесь с соответствующими литературными ссылками ряд результатов, используемых нами в дальнейшем. Из [2] нам потребуется две леммы.

Лемма 1. *При* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$

$$\rho_1(F_p^n, \mathfrak{G}) < 3\,\frac{p}{1-p}.$$

Лемма 2. *Если $f(t)$ и $g(t)$ характеристические функции целочисленных случайных величин и*

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt$$

существует, то

$$\rho_1(F, G) \leqslant \frac{1}{4} I_1,$$

где F и G соответствующие функции распределения.

Из [5] (стр. 168).

---

* Замечание при корректуре. В настоящее время автору удалось существенно усилить Теорему 4. Именно что при любом $\varepsilon > 0$

$$\sup_F \rho_1(F, G) > C n^{-\frac{2}{3}} \log^{-\frac{7}{2}-\varepsilon} n$$

Лемма 3. *Пусть* $\mu_n = \sum_{u=1}^{n} \xi_u$, *где* ξ_u *независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения* 1 *и* 0 *с вероятностями* p *и* $(1-p)$ *соответственно, тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t + \frac{t^2(1-2p)}{6\sqrt{np(1-p)}} + t^3\frac{((1-p)^3+p^3)}{12np(1-p)}\right\} < e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Кроме того при доказательстве теоремы 2 нам потребуется связь между моментами и семиинвариантами s-мерного распределения. В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = \{x_1 \ldots x_s\},\ (\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{u=1}^{s} x_u t_u$$

$\nu \geqslant 0$ означает, что $\nu_u \geqslant 0$ и целочисленно;

$$\overline{\overline{\nu}} = \sum_{u=1} \nu_u,\ \nu! = \prod_{u=1}^{s}(\nu_u!),\ (\mathbf{t})^{\nu} = \prod_{u=1}^{s}(t_u)^{\nu_u},\ a^{\nu} = a^{\overline{\overline{\nu}}};$$

ξ — s-мерная случайная величина; $f(\mathbf{t}) = \mathbf{M}e^{i(\mathbf{t},\xi)}$; $\alpha(\nu)$ — момент $\overline{\overline{\nu}}$ порядка случайной величины ξ:

$$\alpha(\nu) = \alpha^{k\ldots j}_{v\ldots w} = M\xi_v^k \ldots \xi_w^j \quad (\nu : \nu \geqslant 0;\ \overline{\overline{\nu}} = k + \ldots + j;\ \nu_v = k \ldots).$$

$\varkappa(\nu)$ семиинвариант $\overline{\overline{\nu}}$ порядка случайной величины ξ:

$$\varkappa(\nu) = \varkappa^{k\ldots j}_{v\ldots w} \quad (\nu : \nu \geqslant 0;\ \overline{\overline{\nu}} = k + \ldots + j;\ \nu_v = k \ldots).$$

Соотношения между моментами и семиинвариантами мы будем получать из формулы

$$\ln\left(1 + \sum_{\nu\geqslant 0;\ \overline{\overline{\nu}}\geqslant 1} \frac{\alpha(\nu)}{\nu!}(i\mathbf{t})^{\nu}\right) = \sum_{\nu\geqslant 0;\ \overline{\overline{\nu}}\geqslant 1} \frac{\varkappa(\nu)}{\nu!}(i\,\mathbf{t})^{\nu}.$$

Доказательство теоремы 1. Пункт а) легко следует из леммы 1 и доказываемой ниже

Лемма 4. *Существует такое* C_1, *что для* $p \leqslant \frac{1}{2}$

$$\rho_1(F_p^n, \Phi) < C_1(n^{-1} + (np)^{-2}).$$

Доказательство леммы 4. Выберем целое k таким образом, чтобы

$$1\frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{2}p^3 = \frac{k-\varepsilon}{n},$$

где $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $n > 30$. Обозначим

$$h(t) = i\frac{k}{n}t + \left(p - 1\frac{3}{5}p^2 - \frac{2}{3}p^3 - \frac{\varepsilon}{n}\right)(e^{it} - 1) + \frac{1}{24}p^3(e^{i3t} - 1) +$$

$$+ \frac{3}{80}p^2(e^{-i3t} - 1) + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{n}(e^{-it} - 1) + \frac{1}{6}\frac{\varepsilon}{n}(e^{2it} - 1).$$

Непосредственно проверяется, что первые три семиинварианта неограниченно-делимого распределения G_p, задаваемого характеристической функцией

$$g(t) = \exp\{h(t)\},$$

равны соответственно p, $p(1-p)$, $p(1-p)(1-2p)$, а семиинварианты четвертого, пятого порядков отличаются от соответствующих семиинвариантов F_p не более, чем на $C_2\left(p^2+\frac{1}{n}\right)$, где C_2 некоторая постоянная. Разлагая функции $f(t)$ и $g(t)$ в ряд Тейлора до моментов шестого порядка и вычитая первый ряд из второго, получим

$$|f(t)-g(t)| < C_2(t^4+t^5)\left(p^2+\frac{1}{n}\right)+C_3pt^6.$$

Далее, существует такое C_4, что для $|t| < \pi$

$$\max\{|f(t)|, |g(t)|\} < \exp\{-C_4pt^2\},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f^n-g^n}{t}\right|dt \leqslant n\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f-g}{t}\right| e^{-C_4pt^2(n-1)}\,dt < C_1\left(\frac{1}{n}+(np)^{-2}\right).$$

Для того чтобы завершить доказательство леммы 4, нам остается только применить лемму 2.

Аналогично лемме 4 доказывается утверждение б) теоремы 1, только вместо $h(t)$ надо взять

$$h'(t) = p(1-p)(e^{it}+e^{-it}-2).$$

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\zeta = \sum_{u=1}^{n}\xi_u;\quad \zeta^* = \sum_{u=1}^{n}\xi_u - \sum_{u=n+1}^{2n}\xi_u,$$

где $\xi_u = \{\xi_1 \ldots \xi_{2n}\}$ $(u=\overline{1,2n})$ независимые одинаково распределенные многомерные случайные величины, принимающие с вероятностями

$$q_1 \leqslant q_2 \leqslant q_3 \ldots \leqslant q_{s+1}$$

соответственно значения

(1, 0, 0 ... 0), (0, 1, 0 ... 0), (0, 0, 1 ... 0), ..., (0, 0, 0 ... 1), (0, 0, 0 ... 0)

и пусть $\Phi(A)$ $\Phi^*(A)$, $\Phi^n(A)$, $\Phi^{*n}(A)$ вероятностные меры в s-мерном пространстве, соответствующие ξ, $\xi_1-\xi_2$, ζ, ζ^* соответственно. Пусть также $\hat{\mathfrak{G}}$ совокупность s-мерных неограниченно-делимых законов распределения $\hat{G}$ *. Очевидно, что теорема 2 будет доказана, если мы покажем, что

$$\text{а) } \rho_2(\Phi^n, \hat{\mathfrak{G}}) < C(s)\,n^{-\frac{2}{3}}(\ln n)^{\frac{8}{2}}, \tag{3}$$

$$\text{а) } \rho_2(\Phi^{*n}, \hat{\mathfrak{G}}) < C(s)\,n^{-1}(\ln n)^{s}. \tag{4}$$

При оценке вариации разности двух вероятностных мер нами будет использоваться

Лемма 5. *Пусть* $f(t)$, $g(t)$ *характеристические функции* s*-мерных целочисленных случайных величин*; Φ, G *соответствующие им меры*; *и пусть существует интеграл*

$$I_2 = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}}_{s\text{ раз}}|f(t)-g(t)|\,dt_1\ldots dt_s.$$

---

* Так же, как и в одномерном случае, s-мерная характеристическая функция называется неограниченно-делимой, если при любом натуральном n она есть n-ая степень некоторой другой характеристической функции.

тогда

$$\rho_2(\Phi, G) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^s} I_2 m(A) + 1 - \Phi(A) + 1 - G(A),$$

где A произвольная область s-мерного пространства, а $m(A)$ число точек с целочисленными координатами, попавших в эту область.

В дальнейшем мы будем область $A(A^*)$ брать в виде s-мерного прямоугольника

$$A = \{\mathbf{x} : c_u \leqslant x_u \leqslant d_u \; u = \overline{1,s}\},$$

$$A^* = \{\mathbf{x} : c_u^* \leqslant x_u \leqslant d_u^* \; u = \overline{1,s}\},$$

полагая в случае а)

$$c_u = nq_u - 2\sqrt{nq_u \ln n}; \; d_u = nq_u + 2\sqrt{nq_u \ln n}, \text{ если } nq_u > \ln n;$$

$$c_u = 0; \; d_u = e^2 \ln n, \text{ если } nq_u \leqslant \ln n;$$

и в случае б)

$$c_u^* = -2\sqrt{nq_u \ln n}; \; d_u^* = 2\sqrt{nq_u \ln n}, \text{ если } nq_u > \ln n;$$

$$c_u^* = -e^2 \ln n; \; d_u^* = e^2 \ln n, \text{ если } nq_u \leqslant \ln n.$$

Легко проверить, что как в случае а)

$$1 - \Phi(A) < \frac{2s}{n}, \tag{5}$$

так и в случае б)

$$1 - \Phi^*(A^*) < \frac{4s}{n}. \tag{6}$$

Для доказательства (5) нужно, полагая $p = q_u$ и $p = 1 - q_u$, применить 2 раза лемму 3 при $t = \sqrt{2 \ln n}$, если $nq_u > \ln n$; а если $nq_u \leqslant \ln n$, — воспользоваться оценкой

$$\sum_{m \geqslant e^2 \ln n}^{n} q_u^m (1 - q_u)^{n-m} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} < \sum_{m \geqslant e^2 \ln n} \frac{(q_u n)^m}{m!} (1 - q_u)^{n-m} <$$

$$< \frac{(q_u n)^{[e^2 \ln n]+1}}{([e^2 \ln n]+1)!} < \frac{1}{n}$$

($[x]$ здесь означает целую часть x).

Неравенство (6) сразу же следует из (5), так как $1 - \Phi^*(A^*) \leqslant 2(1 - \Phi(A))$.

Пусть $f^*(t)$ — характеристическая функция, соответствующая Φ^*; $g^*(t) = \exp\left\{\sum_{u=1}^{s} q_u (1 - q_u)(e^{it_u} + e^{-it_u} - 2)\right\}$, а G^* s-мерное целочисленное неограниченно-делимое распределение, соответствующее g^*

$$I_2 = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi}}_{s \text{ раз}} |f^{*n} - q^{*n}| \, dt_1 \dots dt_s \leqslant n \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi}}_{s \text{ раз}} |f^* - g^*| \{\max(|f^*(t)|, \; |g^*(t)|)\}^{n-1} dt_1 \dots dt_s.$$

Воспользуемся формулой $e^z = 1 + \sum_{u=1}^{k} \frac{z^u}{u!} + \gamma \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} e^{|z|}$, где $|\gamma| \leqslant 1$

$$|f^*(t) - g^*(t)| \leqslant 2 \sum_{u=1}^{s} q_u^2 (1-q_u)^2 t_u^4 \exp\left\{\sum_{u=1}^{s} q_u (1-q_u) t_u^2\right\} \tag{7}$$

$$\max(|f^*(t)|, |g^*(t)|) \leqslant \exp\left\{-\pi^{-2} 4 \sum_{u=1}^{s} q_u (1-q_u) t_u^2\right\} \quad (|t_u| < \pi u = \overline{1,s}). \tag{8}$$

Из (7)—(8) следует, что

$$I_2 < C_5 n \sum_{u=1}^{s} \left\{ q_u^2 \int_{-\pi}^{\pi} t_u^2 \exp\left\{-\frac{1}{s} n q_u t_u^2\right\} dt_u \prod_{v \neq u} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{s} n q_v t_v^2\right\} dt_v \right\}, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{-nqt^2\}\, dt \leqslant \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,(nq)^{-\frac{1}{2}} & nq > \ln n \\ 2\pi & nq \leqslant \ln n, \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \exp\{-nqt^2\} dt \leqslant \begin{cases} C_6 (nq)^{-\frac{5}{2}} & nq > \ln n, \\ C_7 (nq)^{-2} & nq \leqslant \ln n. \end{cases} \tag{11}$$

Применив пункт б) теоремы 1, получаем, что

$$|G^*(A^*) - \Phi^*(A^*)| < 2sCn^{-1}. \tag{12}$$

Следовательно, $1 - G^*(A^*) < C_8 n^{-1}$.

Из леммы 5, (6), (9)—(12) следует (4). Итак, пункт б) теоремы 2 доказан.

Доказательство утверждения пункта а).

Введем следующие обозначения

1. $0 \leqslant r \leqslant s$ — целое число такое, что

$$q_1 < \ldots \leqslant q_r \leqslant n^{-\frac{2}{3}} < q_{r+1} \ldots < q_{s+1}$$

2. $\varkappa(\nu)$ семиинварианты ξ:

$$\varkappa_u^1 = q_u;\ \varkappa_u^2 = q_u(1-q_u);\ \varkappa_{u,v}^{1,1} = -q_u q_v;$$

$$\varkappa_u^3 = q_u - 3q_u^2 + 2q_u^3;\ \varkappa_{u,v}^{2,1} = -q_u q_v (1-2q_u);$$

$$\varkappa_{u,v,w}^{1,1,1} = 2q_u q_v q_w;$$

$$\varkappa_u^4 = q_u - 7q_u^2 + 12q_u^3 - 6q_u^4;$$

$$\varkappa_{u,v}^{3,1} = -q_u q_v + 6q_v q_u^2 - 6q_u^3 q_v;$$

$$\varkappa_{u,v,w}^{2,1,1} = 2q_u q_v q_w - 6q_u^2 q_v q_w;$$

$$\varkappa_{u,w}^{2,2} = -q_u q_v + 2(q_u q_v^2 + q_u^2 q_v) - 6q_u^2 q_v^2;$$

$$\varkappa_{u,v,w,z}^{1,1,1,1} = -6q_u q_v q_w q_z$$

. . . . . .

3. l, $m > 0$ целые положительные достаточно большие числа, не зависящие от $q_1 \dots q_s$; их выбор будет произведен в дальнейшем.

4. $\omega_{u,v} = m^{-3} q_u q_v \sum\limits_{\substack{w>r \\ w \neq u,v}} q_w$; $\omega_u = \sum\limits_{v \neq u} \omega_{u,v}$.

5. $\tau^1_{u,v}$, $\tau^2_{u,v}$, $\tau^2_{u,v}$ решения системы

$$-\tau^1_{u,v} + \tau^2_{u,v} - \tau^3_{u,v} = m^{-2} x^{1,1}_{u,v} - 2\omega_{u,v}$$

$$-\tau^1_{u,v} - \tau^2_{u,v} + \tau^3_{u,v} = m^{-3} x^{2,1}_{u,v} - 2\omega_{u,v}$$

$$+\tau^1_{u,v} - \tau^2_{u,v} - \tau^3_{u,v} = m^{-3} x^{1,2}_{u,v} - 2\omega_{u,v}$$

$$\tau^1_{u,v} = q_u q_v (m^{-2} + O(m^{-3}))$$

$$\tau^2_{u,v} = q_u q_v (1 - q_u - q_v) m^{-3} + 2\omega_{u,v}$$

$$\tau^3_{u,v} = q_u q_v (m^{-2} + O(m^{-3}))$$

(здесь и в дальнейшем $x = O(y)$ означает, что найдется постоянная C, не зависящая от $q_1 \dots q_s$, n, такая, что $|x| < C|y|$).

6. $\tau^4_u = \sum\limits_{v:r<v<u} \tau^1_{u,v} + \sum\limits_{v>u} \tau^3_{v,u}$,

$$\tau^5_u = \sum_{v:r<v<u} \tau^3_{u,v} + \sum_{v>u} \tau^1_{v,u},$$

$$\tau^6_u = \sum_{v \neq u} \tau^2_{u,v},$$

7. $\sum\limits_{u=1}^{r} q_k = p$,

8. $\Delta_u = (\tau^4_u + \tau^5_u + \tau^6_u) m^2 + q_u p + m^2 \omega_u < q_u (1 - q_u - q_{s+1})(1 + O(m^{-1}))$,

9. $\lambda_u = -\Delta_u - q_u p + m^3 (\tau^4_u - \tau^5_u - \tau^6_u + 2\omega_u) + 2q_u(1 - q_u)$; $|\lambda_u| < 3q_u$.

10. k_u целые, $0 \leqslant \varepsilon_u < 1$ определяются равенствами

$$\frac{k_u - \varepsilon_u}{h} = q_u^2 + \Delta_u + \frac{|\lambda|(l + \operatorname{sign}\lambda_u)}{l(l - \operatorname{sign}\lambda_u)} - m(2\omega_u + \tau^4_u - \tau^5_u - \tau^5_u) + q_u p,$$

11. $$h(t_{r+1} \dots t_s) = \sum_{u>r} \left\{ i \frac{k_u}{n} t_u + \left(q_u(1 - q_u) - \Delta_u - \frac{\varepsilon_u}{n} - \frac{|\lambda_u|}{l - \operatorname{sign}\lambda_u} \right) \times \right.$$

$$\times (e^{it_u} - 1) + \frac{|\lambda_u|}{l^2 (l - \operatorname{sign}\lambda_u)} \cdot (e^{-il(\operatorname{sign}\lambda_u) t_u} - 1) + \frac{\varepsilon_u}{3n} (e^{-it_u} - 1) +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_u}{6n} (e^{2it} - 1) \right\} + \sum_{u,v:u>v>r} \{ \tau'_{u,v} (e^{im(t_u - t_v)} - 1) + \tau^2_{u,v} (e^{-im(t_u + t_v)} - 1) +$$

$$+ \tau^3_{u,v} (e^{im(-t_u + t_v)} - 1) \} + 2 \sum_{u,v,w:u>v>w>r} m^{-3} q_u q_v q_w (e^{im(t_u + t_v + t_w)} - 1).$$

Выпишем коэффициент в h при $(e^{itu}-1)$

$$q_u(1-q_u)-\Delta_u-\frac{\varepsilon_u}{n}-\frac{|\lambda_u|}{l-\operatorname{sign}\lambda_u}>q_u\left(q_{s+1}-n^{-\frac{2}{3}}-\frac{3}{l-1}-O\right)\left(\frac{1}{m}\right).$$

Выбираем теперь $l>1$, m, n_0 так, чтобы для любых $q_1 \dots q_s$ и $n>n_0$

$$n^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{l-1}+O\left(\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{2(s+1)}.$$

Положим

$$g(t)=\exp\left\{\sum_{u=1}^{r}q_u(p+q_{s+1})(e^{itu}-1)+\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_v(e^{i(t_u-t_v)}-1)+h(t_{r+1}\dots t_s)\right\},$$

тогда $g^n(t)$ — характеристическая функция целочисленной s-мерной неограниченно-делимой случайной величины.

$$g(t)=\exp\left\{\sum_{u=1}^{r}q_u(e^{itu}-1)\right\}\exp\left\{\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_v(e^{itu}-1)(e^{-itv}-1)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{v>r}pq_v(e^{-itv}-1)+h(t_{r+1}\dots t_p)\right\}=$$

$$=\left(1-\sum_{u=1}^{r}q_u(e^{itu}-1)+O\left(\sum_{1}^{r}q_u^2t_u^2\right)\right)\left(1+\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_v(e^{itu}-1)\times\right.$$

$$\left.\times(e^{-itv}-1)+O\left(\sum_{u=1}^{r}q_u^2t_u^2\right)\right)\exp\left\{\sum_{\substack{\nu:\nu\leqslant 5\\ \nu_1=\dots\nu_r=0}}\frac{\varkappa(\nu)}{\nu!}(it)^\nu+O\left(\sum_{\substack{\nu:\nu=6\\ \nu_1=\dots\nu_r=0}}\frac{\varkappa(\nu)}{\nu!}(t)^\nu+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\sum_{u>r}t_u^4+\sum_{u,v>r}q_uq_vt_u^3t_v\right)\right\}=\left\{1+\sum_{u=1}^{r}q_u(e^{itu}-1)-\right.$$

$$\left.-i\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_vt_v(e^{itu}-1)+O\left(\sum_{u=1}^{r}q_u^2t_u^2+\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_vt_ut_v^2\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\sum_{u>r}\left(q_u\sum_{v=1}^{s}\frac{(it_u)^v}{v!}+O\left(\sum_{\substack{\nu:\nu=6\\ \nu_1=\dots=\nu_r=0}}\frac{\varkappa(\nu)}{\nu!}(t)^\nu+\frac{1}{n}\sum_{u>r}t_u^4+\sum_{u,v>r}q_uq_vt_u^3t_v\right)\right\}=$$

$$=1+\sum_{u=1}^{r}q_u(e^{itu}-1)+\sum_{u>r}\left(q_u\sum_{v=1}^{s}\frac{(it_u)^v}{v!}\right)+$$

$$+O\left(\sum_{\substack{\nu:\nu=6\\ \nu_1=\dots=\nu_r=0}}\frac{\varkappa(\nu)}{\nu!}(t)^\nu+\frac{1}{n}\sum_{u>r}t_u^4+\sum_{u,v>r}q_uq_vt_u^3t_v+\sum_{u\leqslant r}q_u^2t_u^2+\sum_{\substack{u\leqslant r\\ v>r}}q_uq_vt_ut_v^2\right).$$

Окончание доказательства аналогично доказательству пункта б) теоремы 2 и может быть проведено читателем самостоятельно.

Доказательство теоремы 3 и 4 мы будем некоторое время проводить параллельно. В дальнейшем или $p=\frac{1}{2}$ или $p=n^{-\frac{2}{3}}$. Оценим дисперсию распределения $G_p: G_p \in \mathfrak{B}^M$, $\rho_1(F_p^n, G_p^n) < C^{-\frac{2}{3}}$. Для этого сначала заметим, что

$$\rho_1(F^*, G^*) = \rho_1(F(x) * [1-F(-x+0)],\ G(x) * [1-G(-x+0)]) \leqslant 2\rho_1(F, G),$$

а затем оценим сверху и снизу интеграл

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (F_p^{*n} - G_p^{*n})^2\, dx.$$

(Идея использовать для получения нижней оценки для $\rho_1(F_p^n, \mathfrak{B}^M)$ оценку сверху и снизу I_3 заимствована из работы [4]). На основании равенства Парсеваля имеем

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^n-g^n)^2}{t^2}\,dt \geqslant n^2 \int_{-\frac{1}{2M}}^{\frac{1}{2M}} \frac{(f-g)^2}{t^2}\{\min(|f|, |g|)\}^{2(n-1)}dt; \tag{13}$$

здесь f, g — характеристические функции, соответствующие F_p^* и G_p^*. С другой стороны,

$$I_3 \leqslant 2\left\{\rho_1^2(F_p^{*n}, G_p^{*n})\,B + \int_{x>B}(1-F_p^{*n})^2\,dx + \int_{x>B}(1-G_p^{*n})^2\,dx\right\}. \tag{14}$$

Пусть

$$\alpha_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} dG_p^*(x)\ (k=1, 2, \ldots),$$

$$\log g(t) = -\alpha_2\frac{t^2}{2!} + \varkappa_4\frac{t^4}{4!} - \ldots,$$

причем $\varkappa_{2k} < M^{2(k-1)}\alpha_2$, так как $G_p^* \in \mathfrak{B}^M$. Применив неравенство Чебышева, имеем

$$\int_{x>B}(1-G^{*n})^2\,dx < \frac{1}{3}\frac{(n\alpha_2)^2}{B^3}. \tag{15}$$

При $|t| < \frac{1}{2M}$, $M > 1$

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= 1-4p(1-p)\sin^2\frac{t}{2} > e^{-2p(1-p)t^2} \\ g(t) &\geqslant \exp\left\{-\frac{\alpha_2}{2}t^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$f(t) = 1-p(1-p)t^2 + \frac{p(1-p)}{12}t^4 - \varepsilon_1\frac{p(1-p)}{16}t^6,\quad |\varepsilon_1|<1$$

$$g(t) = \exp\left\{-\alpha_2\frac{t^2}{2!} + \varkappa_4\frac{t^4}{4!} - \varepsilon_2\varkappa_6\frac{t^6}{6!}\right\} = 1-\alpha_2\frac{t^2}{2} +$$

$$+(\varkappa_4+3\alpha_2^2)\frac{t^4}{4!} + \varepsilon_3 t^6(\varkappa_6 + (\alpha_2 t^2)^3)\quad |\varepsilon_2|<1;\quad |\varepsilon_3|<1.$$

Пусть $\alpha \geqslant \max\left\{\frac{\alpha_2}{2},\ 2p(1-p)\right\}$, тогда, полагая $B = \sqrt{\alpha}\, n^{\frac{5}{6}}$ будем иметь согласно (14)—(16)

$$I_3 < C_9 (\alpha n)^{\frac{1}{2}} n^{-1}, \tag{17}$$

где C_9 абсолютная постоянная. С другой стороны, для $n \geqslant n_0$

$$2I_3 > I_4(\alpha) \equiv n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\alpha_2 - 2p(1-p)\frac{t}{2!} - (\varkappa_4 + 3\alpha_2^2 - 2p(1-p))\frac{t^3}{4!} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon_4 (p(1-p) + \varkappa_6 + \alpha_2^3) t^5\right]^2 e^{-\alpha n t^2} dt \quad |\varepsilon_4| < 1. \right. \tag{18}$$

Из (17) и (18) видно, что $\frac{\alpha_2}{2p(1-p)} - 1 = o(1)$.

Окончание доказательства теоремы 3. $\alpha_4 > 3\alpha_2^2 > \frac{3}{4} + o(1)$.

Очевидно, что существует такая постоянная C_{10}, что

$$\max(I_4(\alpha),\ I_4(2\alpha)) > C_{10} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^6 e^{-nt^2} dt > 2C_{11} n^{-\frac{3}{2}}. \tag{19}$$

Для неограниченно-делимых распределений существует очень удобная формула для оценки больших уклонений. Пусть

$$g(t) = \int_{-M}^{M} (e^{itu} - 1 - itu)\, dk(u),$$

тогда

$$1 - G^{*n}(x) < \exp\left\{-ax + n\int_{-M}^{M} (e^{au} - 1 - au)\, dk(u)\right\} < \exp\left\{-ax + na^2\alpha_2 e^{\frac{M}{\sqrt{np}}}\right\}, \tag{20}$$

где $a = (np)^{-\frac{1}{2}} (\ln n)^{\frac{1}{2}}$. На основании (14), (18)—(20) и леммы 3 получаем при $B = 4\sqrt{n \ln n}$

$$C_{11} n^{-\frac{3}{2}} < I_3 < 8\sqrt{n \ln n}\, \rho^2\left(F^{*n}_{\frac{1}{2}},\ G^{*n}_{\frac{1}{2}}\right) + O(n^{-2}).$$

Откуда и следует утверждение теоремы 3.

Окончание доказательства теоремы 4. Если $G^n \in \mathfrak{G}_1^M(n^{\frac{1}{3}})$, то либо второй момент G отличается от $n^{-\frac{2}{3}}(1 - n^{-\frac{2}{3}})$ на величину, не меньшую $n^{-\frac{4}{3}}$ (так, например, будет при пуассоновском приближении), либо второй момент отличается на меньшую величину, но разность четверных моментов порядка n^{-1} (такое приближение может быть достигнуто только на нецелочисленном дискретном распределении с шагом единица). На основании (14), (18), (20) и леммы 3 получаем, что в обоих случаях при $B = 4n^{\frac{1}{6}} (\ln n)^{\frac{1}{2}}$

$$C_{12} n^{-\frac{7}{12}} < I_3 < 8 n^{\frac{1}{6}} (\ln n)^{\frac{1}{2}}\, \rho^2\left(F^{*n}_{n^{-\frac{2}{3}}},\ G^{*n}_{n^{-\frac{2}{3}}}\right) + O(n^{-2}).$$

Откуда и следует утверждение теоремы 4.

Поступила в редакцию
30.10.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Две равномерные предельные теоремы для сумм независи мых слагаемых, Теория вероят. и ее примен., **I**, 4 (1956), 426—436.
[2] И. П. Цареградский, О равномерном приближении биномиального распреде ления, Теория вероят. и ее примен., **III**, 4 (1958), 470—474.
[3] И. П. Цареградский, Приближение распределений сумм (резюме доклада Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 243—246.
[4] И. П. Цареградский, Диссертация МГУ, 1959.
[5] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.
[6] Ю. В. Прохоров, О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова, Тео рия вероят. и е примен., **V**, 1 (1960), 103—113.

ON APPROXIMATION OF A MULTINOMIAL DISTRIBUTION BY INFINITELY DIVISIBLE LAWS

L. D. MESHALKIN (MOSCOW)

(Summary)

Let $F_p^n(x)$ be (n, p) a binomial distribution function, $\mathfrak{G}$ a set of all infinitely divisib laws and

$$\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_x | F_p^n(x) - G(x) | .$$

Then,

a) $\sup\limits_{0 \leqslant p \leqslant 1} \rho_1(F_p^n, \mathfrak{G}) < C_0 n^{-\frac{2}{3}}$,

b) $\rho_1(F^n_{n^{-\frac{2}{3}}}, \mathfrak{G}_1^M(n^{\frac{1}{3}})) > C(M)\, n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-\frac{1}{4}}$,

where C_0 is an absolute constant, $C(M) > 0$ depends on M only, and

$$\mathfrak{G}_1^M(a) = \left\{ G : G \in \mathfrak{G};\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x) = \exp\left[i\gamma t + \sum_{|k| < M} (e^{itk} - 1) q_k \right],\right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) = a,\quad q_k \geqslant 0,\ k = 0, \pm 1 \ldots \right\}.$$

The result a) is generalized for the case of a multinomial distribution.

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ ЭССЕЕНА «МОМЕНТНОЕ НЕРАВЕНСТВО С ПРИМЕНЕНИЕМ К ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ»

Б. А. РОГОЗИН

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных одинаково распределенных величин, с $\mathbf{M}\xi_i = 0$, $\mathbf{D}\,\xi_i = \sigma^2$, $\mathbf{M}\xi_i^3 = \alpha_3$, $\mathbf{M}\,|\xi_i|^3 = \beta$, $\rho_3 = \dfrac{\beta}{\sigma^3}$ и функциями распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi_i < x\}$. Величина ρ_3 является вполне удовлетворительной мерой уклонения функции $F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\dfrac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\}$, где $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, от предельного нормального закона $\Phi(x)$, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, в смысле, что

$$\sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| < C_1\rho_3,$$

где C_1 — абсолютная константа. Это известное неравенство Берри-Эссеена (см. [1], [2]). Большой интерес представляет определение асимптотически правильной константы C_2, т. е. такой, что неравенство

$$\sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| < (C_2 + \varepsilon)\rho_3,$$

где ε — произвольное положительное число выполнено, начиная с некоторого $n(F, \varepsilon)$, иными словами, неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_x \sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_2\rho_3$$

выполнено для всех функций распределений данного класса, а неравенство

$$\sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| < (C_2 - \varepsilon)\rho_3 \qquad (1)$$

для некоторого закона $F(x)$ нарушается для бесконечного множества значений n, другими словами, неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_x \sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| \geqslant (C_2 - \varepsilon)\rho_3$$

выполняется для некоторой функции распределения $F(x)$.

Первоначально предполагалось, что такой асимптотически правильной константой является $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, но в действительности оказалось (см. [3]), что такой величиной служит константа $\dfrac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}$, причем неравенство (1) выполняется для некоторой функции распределения с двумя скачками лишь для конечного числа значений n. В работе [3] показано несколько больше, а именно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \sqrt{n}\,|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_2\rho_3,$$

т. е. показано существование предела.

В случае, когда рассматривается вся совокупность законов распределения, обладающих третьими абсолютными моментами, некоторый интерес представляет определение асимптотически правильной константы C_3 такой, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{\substack{-\infty<a<+\infty \\ 0<\sigma_1<\infty}} \sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| \leqslant C_3\rho_3$$

выполнено для всей совокупности функций распределения с указанным выше свойством, а неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{a,\sigma_1} \sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| \leqslant (C_3 - \varepsilon)\rho_3$$

нарушается для некоторого закона $F(x)$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что $C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, и еще раз подчеркнуть экстремальный характер симметричной схемы Бернулли (ср. [4]).

Для этого воспользуемся следующим равенством, установленное Эссеном [2],

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{h}{2\sigma} \Psi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\alpha_3}{6\sigma^3} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где h — величина максимального шага для решетчатого распределения, $h = 0$ для нерешетчатого распределения, и $\Psi_n(x)$ есть разрывная периодическая функция с периодом $\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}$ с экстремальными значениями ± 1.

Для доказательства рассмотрим два случая.

Первый случай: $\frac{h}{2\sigma} \leqslant 4 \frac{|\alpha_3|}{6\sigma^3}$, по принятому нами соглашению сюда же входят нерешетчатые распределения. Легко видеть, что

$$\sup_x \sqrt{n} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{h}{2\sigma} + \frac{|\alpha_3|}{6\sigma^3} \right) + |o(1)|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \sqrt{n} |F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{|\alpha_3|}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}},$$

т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{a,\sigma_1} \sup_x \sqrt{n} |F_n(x) - \Phi\frac{x-a}{\sigma_1}| < \frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}.$$

Второй случай: $\frac{h}{2\sigma} > 4 \frac{|\alpha_3|}{6\sigma^3}$. Рассмотрим

$$\sqrt{n} \left| F_n(x) - \Phi\left(x - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| =$$

$$= \left| k\Phi'\left(x - \theta_{nx} \cdot \frac{k}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{2\sigma} \Psi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right|, \quad (2)$$

где k — некоторая постоянная, величина которой будет указана позднее. Заметим, что

$$\left| \Phi'\left(x - \theta_{nx}\frac{k}{\sqrt{n}}\right) - \Phi'(x) \right| < B \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 0 < \theta_{nx} < 1.$$

В силу предыдущего (2) можно переписать следующим образом:

$$\sqrt{n} \left| F_n(x) - \Phi\left(x - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| ke^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{h}{2\sigma} \Psi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right|,$$

положим $k = -\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}$, тогда получим

$$\sqrt{n} \left| F_n(x) - \Phi\left(x - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{h}{2\sigma} \Psi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{\alpha_3}{6\sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) \right|.$$

а) Пусть $\alpha_3 > 0$, рассмотрим функцию $f(x) = (A + Dx^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$, $A > 0$, $D > 0$, $\frac{A}{D} > 4$. Покажем, что $\sup_x f(x) = A$, но это очевидно, так как нулями $f'(x)$ является $x = 0$.

$x = \pm\sqrt{2 - \frac{A}{D}}$, т. е. единственный максимум достигается в 0, где значение функции равно A. Таким образом,

$$\sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(x - \frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\sup_x\left(\frac{h}{2\sigma} + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3}x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h}{2\sigma} + o(1).$$

б) При $\alpha_3 < 0$ аналогичные рассуждения остаются в силе, следовательно

$$\overline{\lim_n}\inf_{a,\sigma_1}\sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h}{2\sigma}.$$

В дальнейшем воспользуемся неравенством Мизеса [3]: $\frac{h}{2}\sigma^2 \leqslant \beta$, $\frac{h}{2\sigma} \leqslant \rho_3$, причем равенство возможно лишь в случае симметричной схемы Бернулли:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{h}{2}, \\ \frac{1}{2}, & -\frac{h}{2} < x \leqslant \frac{h}{2}, \\ 1, & x > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\overline{\lim_n}\inf_{a,\sigma_1}\sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| \leqslant \frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (3)$$

причем равенство, если возможно, достигается на симметричной схеме Бернулли. Для симметричной схемы Бернулли (3) превращается в равенство, что легко заметить, если учесть, что в этом случае имеется скачок в начале координат, асимптотически равный $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, а все функции распределения нормального типа непрерывны, и $\rho_3 = 1$, т. е.

$$\underline{\lim_n}\inf_{a,\sigma_1}\sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| \geqslant \frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом для симметричной схемы Бернулли

$$\lim_n\inf_{a,\sigma_1}\sup_x \sqrt{n}\left|F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right| = \frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поступила в редакцию
10.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. C. Berry, The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independant variates, Trans, Amer. Math. Soc., 49 (1941), 122—126.
[2] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution function, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1—125.
[3] C. G. Esseen, A moment inequality with an application to the central limit theorem, Skand. Aktuar, 1956, 3—4, 160—170.
[4] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949.

A REMARK ON THE PAPER «A MOMENT INEQUALITY WITH AN APPLICATION TO THE CENTRAL LIMIT THEOREM» BY C. G. ESSEEN

B. A. ROGOZIN (*MOSCOW*)

(*Summary*)

It is proved that

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\substack{-\infty<a<\infty \\ 0<\sigma<\infty}} \sup_x \sqrt{n} \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho_3,$$

where $\Phi(x)$ is a normal distribution function and $F_n(x)$ is a distribution function of a normed sum of independent identically distributed random variables. The constant $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ cannot be improved.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю. К. БЕЛЯЕВ

Рассмотрим стационарный гауссовский сепарабельный процесс $\xi(t)$, принимающий вещественные значения. Для простоты предполагаем, что $\mathbf{M}\xi(t) = 0$. Так как все полученные результаты справедливы для вещественных сепарабельных процессов, то слова сепарабельный и вещественный опускаются. Всюду ниже $F(\lambda)$ обозначает спектральную функцию процесса $\xi(t)$, а $B(s) = \mathbf{M}\xi(t)\xi(t+s)$. Первый круг вопросов связан с непрерывностью выборочных функций. Задача об отыскании необходимых и достаточных условий для непрерывности выборочных функций, выраженных в терминах поведения корреляционной или спектральной функции, не решена до настоящего времени. Однако можно получить достаточные условия, которые нельзя улучшить существенным образом. Р. Л. Добрушин [1] показал, что для стационарных гауссовских процессов возможны лишь разрывы второго рода, причем с вероятностью единица выборочные функции имеют такие разрывы на любом сколь угодно малом интервале. На самом деле можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 1. *Для стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$ справедлива следующая альтернатива: или с вероятностью единица выборочные функции непрерывны или с вероятностью единица выборочные функции неограничены на любом интервале конечной длины.*

Такая же альтернатива справедлива и для ограниченности выборочных функций на всей прямой [2].

Достаточные условия для непрерывности выборочных функций были получены Хантом [3]. Это наиболее сильный результат, из известных в настоящее время автору. Хант показал, что, если для $b > 1$

$$\int_0^\infty [\ln(1+\lambda)]^b dF(\lambda) < \infty, \tag{1}$$

то почти все выборочные функции непрерывны. Для того чтобы выразить эти условия в терминах корреляционных функций, можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1. *Если $\Phi(\lambda)$ неубывающая функция ограниченной вариации, а*

$$\varphi(h) = \int_0^\infty (1 - \cos\lambda h)\, d\Phi(\lambda),$$

то из того, что для некоторого $C > 0$, $a > 0$ *и всех достаточно малых* h

$$\varphi(h) \leqslant \frac{C}{|\ln|h||^a}, \tag{2}$$

следует (1) *для любого* $b < a$. *Обратно, если* (1) *выполнено для некоторого* $b > 0$, *то* (2) *выполнено для* $a = b$ *и любого* $C > 0$ *при всех достаточно малых* h.

Из этой леммы и результата Ханта следует

Теорема 2 *Если для некоторого* $b > 1$ *выполнено* (1), *или, что то же при некоторых* $a > 1$, $C > 0$ *для всех достаточно малых* h *выполнено* (2), *где* $\varphi(h) = B(0) - B(h)$, *то почти все выборочные функции стационарного гауссовского процесса непрерывны.*

Следующие две теоремы показывают, что эти достаточные условия нельзя улучшить существенным образом.

Теорема 3. *Если у стационарного гауссовского процесса* $\xi(t)$ *существует спектральная плотность* $f(\lambda)$ *такая, что для некоторых* $C > 0$, $\lambda_0 \geqslant 0$ *и всех* $\lambda \geqslant \lambda_0$ $f(\lambda) \geqslant \frac{C}{\lambda(\ln\lambda)^2}$, *то почти все выборочные функции* $\xi(t)$ *неограничены на любом интервале конечной длины.*

Теорема 4. *Если у стационарного гауссовского процесса* $\xi(t)$ $B(h)$ *выпуклая функция для* $h \in [0, \delta]$, $\delta > 0$ *такая, что*

$$B(0) - B(h) \geqslant \frac{C}{|\ln|h||},$$

то почти все выборочные функции неограничены на любом интервале конечной длины.

Первоначально автор получил доказательство теоремы 4 путем суммирования гауссовских процессов с выпуклыми корреляционными функциями. Однако следующая лемма, о которой автор узнал от А. Д. Вентцеля, упрощает доказательство.

Лемма 2. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *случайные гауссовские величины* $\mathbf{M}\xi_i = 0$, $\mathbf{M}\xi_i^2 = \sigma_i^2$, $\mathbf{M}\xi_i\xi_j = r_{ij} < 0$ $(i \neq j)$ $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \leqslant a\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}} dx \right).$$

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные с модулем непрерывности выборочных функций. Здесь также можно доказать теорему, аналогичную теореме 1.

Теорема 5. *Если* $\xi(t)$ *стационарный гауссовский процесс, то для любой функции* $\varphi(\delta) > 0$, $\frac{\delta}{\varphi(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \downarrow 0$ *и каждого* t, $-\infty < t < \infty$ *справедлива альтернатива: или с вероятностью единица*

$$\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{|\xi(t+h) - \xi(t)|}{\varphi(h)} > 1 \tag{3}$$

или с вероятностью единица

$$\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{|\xi(t+h) - \xi(t)|}{\varphi(h)} \leqslant 1.$$

Отсюда легко получить

Следствие. *Если для некоторой* $\varphi(\delta)$, $\frac{\delta}{\varphi(\delta)} \to 0$, *когда* $\delta \downarrow 0$ *и*

$$\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{|\xi(t+h) - \xi(t)|}{\varphi(h)} = \zeta,$$

то с вероятностью единица ζ *равна некоторой постоянной, одной и той же для почти всех выборочных функций процесса* $\xi(t)$.

Скажем, что $f(t) \in H(\alpha, C)$, если равномерно по всем t, принадлежащим любому конечному интервалу, для любого $C' > C$ всех достаточно малых h

$$| f(t+h) - f(t) | < C' | h |^{\alpha}.$$

Теорема 6. *Если $\xi(t)$ стационарный гауссовский процесс такой, что для всех достаточно малых*

$$\mathbf{M} | \xi(t+h) - \xi(t) |^2 \leqslant C_1 \frac{| h |^{2\alpha}}{| \ln | h | |},$$

то почти все выборочные функции принадлежат классу

$$H\left(\alpha, \frac{\sqrt{2C_1}}{K_\alpha}\right), \text{ где } K_\alpha = \left(\frac{2^{1+2\alpha}}{2^\alpha - 1}\right)^{-1}.$$

Если же для всех достаточно малых $h \geqslant 0$ $B(h)$ выпуклая функция такая, что

$$C_2 \frac{| h |^{2\alpha}}{| \ln | h | |} \leqslant \mathbf{M} | \xi(t+h) - \xi(t) |^2 \leqslant C_1 \frac{| h |^{2\alpha}}{| \ln | h | |},$$

то с вероятностью единица выборочные функции принадлежат $H\left(\alpha, \frac{\sqrt{2C_1}}{K_\alpha}\right)$ и не принадлежат $H(\alpha, \sqrt{2C_2})$.

Для формулировки достаточных условий в терминах спектральных функций оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 3. *Если для $\psi(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \uparrow \infty$, такой, что $\frac{\lambda^2}{\psi(\lambda)}$ монотонно возрастающая функция при достаточно больших λ и*

$$\int_0^\infty \psi(\lambda)\, dF(\lambda) = C < \infty,$$

то при любом $a > 0$ для всех достаточно малых h

$$\varphi(h) = \int_0^\infty (1 - \cos \lambda h)\, dF(\lambda) < \frac{a^2 C}{\psi\left(\frac{a}{h}\right)}.$$

Теорема 7. *Если для процесса $\xi(t)$*

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} \ln(1+\lambda)\, dF(\lambda) < \infty,$$

то почти все выборочные функции этого процесса принадлежат $H(\alpha, C)$, для любого $C > 0$.

Следующее предложение является уточнением одного из результатов Ханта [3].

Теорема 8. *Если для процесса $\xi(t)$*

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}\, dF(\lambda) \quad \infty,$$

то почти все выборочные функции удовлетворяют обобщенному условию Гёльдера вида

$$| \xi(t+h) - \xi(t) | < C | h |^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{| h |}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для любой $C > 0$, равномерно по всем t, принадлежащим любому интервалу конечной длины.

Примеры, приведенные в работе Ханта [3], показывают, что достаточные условия, сформулированные в теоремах 7, 8, нельзя усилить существенным образом.

Теорема 9. *Для стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$ справедлива альтернатива: или с вероятностью единица выборочные функции $\xi(t)$ дифференцируемы, или с вероятностью единица не дифференцируемы при каждом фиксированном t.*

Как следствие из изложенных выше теорем получается.

Теорема 10. *Если*

$$\int_0^\infty \lambda^{2n} \ln(1+\lambda)\, dF(\lambda) < \infty,$$

то почти все выборочные функции стационарного гауссовского процесса n раз непрерывно дифференцируемы, если же

$$\int_0^\infty \lambda^{2(n+\alpha)} \ln(1+\lambda)\, dF(\lambda) < \infty,$$

то n-ая производная принадлежит $H(\alpha, C)$ для любого $C > 0$.

Свойства аналитичности выборочных функций изложены в работе автора [4]. Отметим здесь только следующее. Пусть $\xi(t)$ с ограниченным спектром, то есть множество E тех λ, для которых при любом $\varepsilon > 0$ $F(\lambda) - F(\lambda - \varepsilon) = \sigma_\varepsilon > 0$ ограничено сверху. Верхнюю грань множества E назовем границей спектра.

Теорема 11. *Если $\xi(t)$ стационарный гауссовский процесс с ограниченным спектром, имеющий границей спектра число $w > 0$, то почти все выборочные функции — целые экспоненциального типа порядка w.*

Поступила в редакцию
18.11.59.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Свойства непрерывности выборочных функций стационарных гауссовских процессов, Теория вероят. и ее примен., V, 1 (1960), 132—134.

[2] Ю. К. Беляев, О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов, Теория вероят. и ее примен., **III**, 3 (1958), 351—354.

[3] G. A. Hunt, Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., **71**, (1951), 38—69. (русский перевод см. сб. Математика 2 : 6 (1958), 87—114).

[4] Ю. К. Беляев, Аналитические случайные процессы. Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 437—444.

LOCAL PROPERTIES OF THE SAMPLE FUNCTIONS OF STATIONARY GAUSSIAN PROCESSES

Yu. K. BELJAEV (MOSCOW)

(Summary)

In this paper some results are related about properties of the sample functions of stationary Gaussian processes such as continuity and Hölder conditions.

СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Р. Л. ДОБРУШИН

Как известно (в частности, на примере марковских процессов), существуют два основных типа «регулярного» поведения выборочных функций вероятностных процессов: выборочные функции могут быть непрерывными или же они могут быть разрывными, но иметь при этом лишь разрывы первого рода (т. е. в точках их разрыва существуют пределы справа и слева). А. Н. Колмогоровым была высказана довольно давно гипотеза о том, что в случае гауссовских стационарных процессов второй из этих двух типов поведения выборочных функций является невозможным. В этой заметке доказывается утверждение, которое, в частности, показывает правильность гипотезы Колмогорова. А именно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\{\xi_t(\omega),\ -\infty < t < \infty\}$ *— сепарабельный стационарный гауссовский процесс с непрерывной корреляционной функцией*

$$B(s) = \mathbf{M}\{\xi_t \xi_{s+t}\}. \tag{1}$$

Тогда имеет место следующая альтернатива:

1) *или при почти всех* ω *выборочные функции процесса* $\xi_t(\omega)$ *являются непрерывными функциями от* t

2) *или существует* $\beta > 0$ *такое, что при почти всех* ω *выборочная функция* $\xi_t(\omega)$ *такова, что для любого* t_0

$$\overline{\lim_{t \to t_0}} \xi_t(\omega) - \underline{\lim_{t \to t_0}} \xi_t(\omega) \geqslant \beta. \tag{2}$$

Очевидно, что выборочная функция, обладающая свойством (2), не имеет пределов справа и слева ни в одной точке и, следовательно, не имеет ни точек непрерывности, ни разрывов первого рода. Естественно ожидать, что при выполнении второго утверждения нашей альтернативы можно взять $\beta = \infty$ (что и имеет место в некоторых примерах), однако развиваемый здесь метод доказательства не позволяет получить этот факт в общем случае. Предположение о непрерывности корреляционной функции является не ограничительным, так как оно (см. [1]) эквивалентно требованию измеримости выборочных функций процесса, а случай неизмеримых выборочных функций вряд ли заслуживает специального внимания.

Что касается критериев, позволяющих судить по корреляционной или спектральной функции о том, какое из утверждений нашей альтернативы имеет место, то мы отошлем читателя к работе Беляева [2], где содержатся некоторые результаты в этом направлении. Поставленная А. Н. Колмогоровым более общая проблема нахождения необходимых и достаточных условий непрерывности выборочных функций гауссовского стационарного процесса остается нерешенной и, по-видимому, является трудной.

Для доказательства теоремы рассмотрим спектральное представление процесса в виде

$$\xi_t = \int_0^\infty \cos \lambda t \, du(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t \, dv(\lambda), \tag{3}$$

где $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ — не зависящие друг от друга гауссовские процессы с независимыми приращениями. Обозначим через $\mathfrak{B}_\tau$ — наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы случайные величины $\{u(\lambda) - u(\mu),\ v(\lambda) - v(\mu),\ \lambda \geqslant \tau,\ \mu \geqslant \tau\}$. Так как $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ — независимые друг от друга процессы с независимыми приращениями, то по известному закону нуля или единицы (см. [3], гл. VII, § 11) для любого события A такого, что $A \in \mathfrak{B}_\tau$ при всех τ вероятность A может равняться лишь нулю или единице.

Предположим, теперь, что не имеет место первое утверждение нашей теоремы и выборочные функции с положительной вероятностью разрывны. Пусть R счетное всюду плотное множество, используемое в определении сепарабельности. Будем говорить, что функция $x(t)$ имеет разрыв на R в точке $t_0 \in (-\infty, \infty)$, величины α, если

$$\max\left(\overline{\lim_{r\to t_0}} x(t) - \lim_{r\to t_0} x(t),\ \left|\overline{\lim_{r\to t_0}} x(t) - x(t_0)\right|,\ \left|\lim_{r\to t_0} x(t) - x(t_0)\right|\right) = \alpha, \text{ при } t_0 \in R, \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{r\to t_0}} x(t) - \lim_{r\to t_0} x(t) = \alpha \text{ при } t_0 \notin R,$$

где пределы берутся по $r \in R$. Из сепарабельности процесса следует, что почти все разрывные выборочные функции $\xi_t(\omega)$ имеют разрыв положительного порядка на R. Поэтому, если мы обозначим через $A_\beta(a, b)$ событие, состоящее в том, что выборочная функция $\xi_t(\omega)$ имеет при одном из $t \in (a, b)$ разрыв величины не меньшей β, то из нашего предположения следует, что при достаточно малом β и достаточно большом интервале (a, b)

$$\mathbf{P}\{A_\beta(a, b)\} > 0. \tag{5}$$

Фиксировав $\tau < \infty$, мы можем представить в соответствии с (3) процесс $\xi_t(\omega)$ в виде

$$\xi_t(\omega) = x_t(\omega) + y_t(\omega), \tag{6}$$

где

$$x_t(\omega) = \int_0^\tau \cos \lambda t\, du(\lambda) + \int_0^\tau \sin \lambda t\, dv(\lambda),$$

$$y_t(\omega) = \int_{\tau+0}^\infty \cos \lambda t\, du(\lambda) + \int_{\tau+0}^\infty \sin \lambda t\, dv(\lambda).$$

Легко видеть, что процесс $x_t(\omega)$ имеет дифференцируемую корреляционную функцию и поэтому почти все его траектории будут непрерывными (этот простой факт можно получить, например, как следствие из теоремы Колмогорова (см. [3]), прил. переводчика в русск. изд.) или из более общего результата Дуба об условиях дифференцируемости выборочных функций [4]. Так как $x_t(\omega)$ является с вероятностью 1 непрерывной, то, с точностью до множества элементарных событий вероятности нуль, выборочная функция $\xi_t(\omega)$ будет иметь в точке t_0 разрыв порядка α тогда и только тогда, когда такой разрыв имеет функция $y_t(\omega)$. Но $y_t(\omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_\tau$ и, следовательно, с точностью до множества вероятности нуль, событие $A_\beta(a, b)$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}_\tau$. Значит, в соответствии со сформулированным выше законом нуля или единицы из (5) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{A_\beta(a, b)\} = 1.$$

Назовем, на время, интервал (c, d) — интервалом разрыва, если $\mathbf{P}\{A_\beta(c, d) = 1\}$. Заметим теперь, что если интервал (a, b) является интервалом разрыва, то в силу стационарности процесса является интервалом разрыва и любой интервал $(a + t, b + t)$. Далее, если (a, b) интервал разрыва, то интервалом разрыва является и интервал $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$. В самом деле, пусть это не так. Тогда в силу предыдущего замечания, если интервал $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ не является интервалом разрыва, то им не является интервал $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Из проведенных выше рассуждений вытекает, что в этом случае $\mathbf{P}\left\{A_\beta\left(a, \frac{a+b}{2}\right)\right\} = \mathbf{P}\left\{A_\beta\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right\} = 0$. Вероятность разрыва величины, не меньшей β, в точке $\frac{a+b}{2}$ также равна нулю, так как иначе, в силу стационарности, была бы положительна вероятность разрыва в любой точке и значит для любого (c, d) $\mathbf{P}\{A_\beta(c, d)\} > 0$. Но раз нет разрывов величины не меньшей β ни на интервале $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, ни на интервале $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, ни в точке $\frac{a+b}{2}$, то их нет и на всем интервале (a, b), и мы пришли в противоречие

с тем, что это интервал разрыва. Из доказанного следует, что существуют сколь угодно малые интервалы разрыва. Так как любой интервал, содержащий интервал разрыва, сам является интервалом разрыва, то мы показали, что все интервалы являются интервалами разрыва. Взяв всевозможные пары рациональных точек (r_1, r_2) и заметив, что

$$\mathbf{P}\{\bigcap_{(r_1, r_2)} A_\beta(r_1, r_2)\} = 1, \tag{8}$$

видим, что для почти всех выборочных функций множество точек разрыва, величины не меньшей β, является всюду плотным на действительной оси. А отсюда вытекает немедленное выполнение второго из альтернативных утверждений нашей теоремы.

Поступила в редакции
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ambrose Warren, On measurable stochastic processes, Trans. Am. Math. Soc., **47**, 1 (1940), 66—79.
[2] Ю. К. Беляев, Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 128—131.
[3] J. I. Doob, Stochastic processes, N 4., Lond, 1953; Дж. Дуб, Вероятностные процессы, М., 1956.
[4] J. I. Doob, The elementary Gaussian processes, Ann. Math. Stat., **15**, 2 (1944), 229—282.

PROPERTIES OF SAMPLE FUNCTIONS OF STATIONARY GAUSSIAN PROCESSES

R. L. DOBRUSHIN *(MOSCOW)*

(Summary)

The main theorem is as follows:

Let $\{\xi_t(\omega), -\infty < t < \infty\}$ be a separable stationary Gaussian process with a continuous correlation function. Then, the following alternative holds true:

1) either for almost all ω sample functions of process $\xi_t(\omega)$ are continuous functions of t

2) or there exists a $\beta > 0$ such that for almost all $\beta > 0$ sample functions $\xi_t(\omega)$ are such as

$$\overline{\lim_{t \to t_0}} \xi_t(\omega) - \underline{\lim_{t \to t_0}} \xi_t(\omega) \geqslant \beta$$

for any t_0.

In the second case almost all sample functions have no points of first order disconti nuities.

ИНФОРМАЦИЯ О ВТОРОМ СОВЕЩАНИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В БИОЛОГИИ

По примеру прошлого года (см. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, вып. 1, 114—116) Ленинградский университет созвал второе в нашей стране совещание по применению математических методов в биологии. Совещание было подготовлено организационным комитетом в составе: профессоров П. В. Терентьева (председатель), Ю. В. Линника, Л. С. Каминского, докторов биологических наук П. И. Гуляева, В. С. Ивлева и доцента Р. Л. Берг (ответственный секретарь). Заседания происходили с 18 по 23 мая 1959 года. Было заслушано 35 докладов и более 87 выступлений. В совещании приняли участие представители свыше 65 учреждений

из 14 различных географических точек нашей страны. Большинство составляли биологи, врачи и математики. Даже эти формальные показатели свидетельствуют, что первое совещание дало свои плоды и второе совещание прошло на значительно более высоком уровне.

Первое совещание занималось преимущественно вопросом о принципиальной применимости математических методов в различных областях биологии. Второе совещание было ориентировано на выполнение тех задач, которые были поставлены перед научными работниками XXI съездом КПСС в деле развития производительных сил страны. Широкое внедрение в биологию и медицину ведущих наук современности — физики и химии невозможно без математики, ибо математические методы уже давно стали неотъемлемой частью физики и химии. Следовательно, проблема применения математических методов в биологии и смежных областях является сейчас *важной* не только для теории, но и *для практической жизни.* Материалы второго совещания в более подробном виде будут опубликованы в изданиях Ленинградского университета. Здесь же излагается содержание докладов, имевших отношение к теории вероятностей и математической статистике.

В докладе академика Б. В. Гнеденко «О некоторых разделах теории вероятностей, имеющих непосредственное отношение к проблемам биологии и медицины», было рассказано о работе группы его учеников преимущественно по линии уточнения диагностики сердечных заболеваний (создание новых приборов, статистический подход к заболеваниям, анализ логики постановки диагноза и т. п.). Сотрудник академика Гнеденко по Институту математики АН УССР М. А. Куликов в своем докладе «Некоторые статистические вопросы диагностики сердечных заболеваний» дал конкретизацию намеченного направления, изложив план статистического изучения историй болезней, изучения электрокардиограмм с помощью гармонического анализа и указал, как на конечную цель, на возможность создания электронной машины, обладающей обширной «памятью» о ранее наблюденных заболеваниях.

Член-корреспондент АН СССР проф. Ю. В. Линник сообщил о некоторых работах математиков Ленинградского университета по применению теории вероятностей к биологии и специально остановился на теории мечения, применяемого зоологами при проведении количественного учета организмов. Последняя проблема имеет непосредственное практическое значение для промысловой биологии. Поэтому ей был посвящен целый ряд докладов. Среди них на первом месте надо поставить сообщение проф. А. А. Любищева «Проблематика и методика количественного учета». Вопрос о типе кривых распределения частот внутри популяций животных и о пользе их трансформации, с чисто биологической стороны, рассматривали проф. А. В. Морозов — «Влияние вылова на динамику водных организмов» и кандидат биологических наук В. С. Смирнов — «Методы вычисления абсолютной численности стада промысловых животных». Жизнь требует от биологов прогнозов колебаний численности рыб, пушных зверей, вредителей растений и т. п. Необходима дальнейшая работа по вооружению биологов математическим аппаратом, подходящим для указанной цели.

В докладе академика И. И. Шмальгаузена «Количество фенотипической информации и скорость естественного отбора» дана была дальнейшая разработка выражения механизма эволюции в терминах кибернетики. Элементарный цикл эволюционного изменения популяции состоит из передачи наследственной информации следующему поколению, из преобразования этой информации в индивидуальном развитии каждой особи, из фенотипической информации о состоянии всей популяции и из обратного преобразования информации в наследственную через посредство регулирующих механизмов (естественный отбор и половой процесс). Все части этого механизма поддаются количественной оценке. Состояние популяции может быть охарактеризовано путем учета количества и плотности распределения вариантов. Качество вариантов оценивается биологическими критериями, а интенсивность естественного отбора — по его результатам. Для этих операций были предложены соответствующие формулы.

В большом обзорном докладе проф. М. В. Игнатьева «Роль статистических методов в антропологии, особенно в ее народно-хозяйственных применениях» был дан обзор работ значительной группы московских антропологов. Они достигли весьма положительных результатов, помогая выработке стандартов бытовых вещей и промышленного оборудования. Интересны применяемые ими понятия «интервал безразличия»

и «степень удовлетворенности», являющиеся приспособлением привычных абстрактных понятий математической статистики к запросам практической жизни.

В докладе проф. П. В. Терентьева на частном примере динамики численности пушных зверей нашего севера было дано дальнейшее развитие метода корреляционных плеяд. Теперь предлагается строить не «корреляционное кольцо», а «корреляционный цилиндр»: на периферии круга располагаются признаки совокупности, а для значения коэффициента корреляции устанавливается третья ось, перпендикулярная к плоскости круга. Признаки соединяются друг с другом «перегородками», высота коих отвечает степени связанности их. Затем производится мысленное сечение этой трехмерной модели на разных уровнях. Уровень, на котором выявляются плеяды, может служить показателем «интегрированности организма» в смысле Олсона (Чикаго, 1958).

Большой интерес и оживленный обмен мнений вызвали среди участников совещания опыты практического применения пробит-метода (И. А. Нечаев), дисперсионного анализа (А. А. Пенкович), критерия лямбда (С. М. Левиант), математические модели эпидемий (Б. С. Бессмертный) и многое другое. Можно с несомненностью установить, что советские биологи стали лучше понимать математиков и обратно, хотя, конечно, предстоит еще большая работа по созданию советской математической биологии. В частности, совещание признало необходимым организацию специальных отделов (кабинетов, лабораторий) по применению математических методов в биологии, обратило внимание на важность систематического ознакомления студентов биологов и медиков с методами обработки количественных показателей и обратилось с просьбой к вышестоящим организациям о созыве третьего аналогичного совещания.

П. В. Терентьев

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Т-00455 Подписано к печати 20/II-1960 г. Тираж 2150 экз Зак 3816
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 11,65+1 вклейка Бум. л. 4¹/₄ Уч.-изд. л. 11,2

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 11 р. 25 к.

ТРУДЫ ВСЕСОЮЗНОГО СОВЕЩАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

(Ереван 19—25 сентября 1958 г.)

Издательство Академии наук Армянской ССР в текущем году издает Сборник трудов Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, состоявшегося в сентябре 1958 года в гор. Ереване.

Сборник содержит тексты докладов и сообщений, прочитанных на совещании учеными Москвы, Ленинграда, Киева, Ташкента, Вильнюса, Еревана и других городов Советского Союза и посвященных некоторым вопросам теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории информации, математической статистики и их разнообразным приложениям.

ОБЪЕМ СБОРНИКА — 10 АВТОРСКИХ ЛИСТОВ.

Заказы посылать по адресу:

Ереван, ул. Абовяна 124, Издательство Академии наук Армянской ССР.

После выхода в свет книга будет высылаться через Армкниготорг («Айгирк»).